論文の内容の要旨

論文題目　Dynamics of Polynomial Automorphisms of $\mathbb{C}^2$
($\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型の作る力学系)

氏 名　神 貞介

一般に, 離散的な力学系とは, E を集合, $F: E \to E$ を写像としたとき, 各点 $x \in E$ に対して x の軌道 $x, F(x), F^2(x) = F(F(x)), \ldots$ の様子を調べる研究分野である. この論文では $E = \mathbb{C}^2$, F が多項式自己同型の場合の力学系を調べている.

複素数の力学系としては一変数の多項式・有理関数の研究が以前から発展していたが, 多変数の力学系はここ十数年ほどで急激に進歩している分野である. これは, 一変数の場合に利用していた複素関数論が多変数の力学系に応用できなかったため研究が遅れていたが, 一変数でポテンシャル論の適用が可能なことがわかり, 多変数で多重ポテンシャル論が導入されたことが大きい. それについては, Bedford–Smillie, Fornæss–Sibony らの貢献が大きく, 実際, この論文でも多重劣調和関数を多用している.

多変数の複素力学系の中で, $\mathbb{C}^2$ での多項式自己同型の作る力学系は最も単純で基本的なものである. ただし, 未解決の問題が数多くあり, また, 物理学や実力学系でも問題になっている Hénon 写像がこの力学系に含まれているので, いろいろな分野との関連性がある.

問題設定. 以下, $z = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ という記号を使う. 一般 Hénon 写像を $g_j(x, y) = (y, p_j(y) - \delta_j x)$ とおく. ただし, $\deg p_j = d_j > 1$, $\delta_j \neq 0$ とする. さらに, $F = g_m \circ \cdots \circ g_1$, $d = d_1 \cdots d_m$ と定義する. 我々はこの F の作る力学系を研究する. これは, Friedland–Milnor (1989) が, $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型の力学系を整理・分類し, この F の力学系がわかれば十分であることを示したからである.

一変数の場合の充填 Julia 集合に対応するものとして,

$$K^{\pm} = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \{F^{\pm n}(z) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ が有界 }\}$$

を定める. Green 関数 $G^{\pm}$ を次のように定義する.

$$G^{\pm}(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} \log^{+} \|F^{\pm n}(z)\|.$$

このとき, $G^{\pm}$ は非負の連続な多重劣調和関数であり, $G^{\pm}(z) > 0$ は $z \in \mathbb{C}^2 \setminus K^{\pm}$ と同値であり, $G^{\pm}|_{\mathbb{C}^2 \setminus K^{\pm}}$ は多重調和になる.

次に $d(\ ,\ )$ を $\mathbb{C}^2$ の適当な距離とし, $X \subset \mathbb{C}^2$ に対し,

$$W^s(X) = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid d(F^n(z), F^n(X)) \to 0\,(n \to \infty)\},$$
$$W^u(X) = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid d(F^{-n}(z), F^{-n}(X)) \to 0\,(n \to \infty)\}$$

をそれぞれ安定集合, 不安定集合と呼ぶ. 次に $a \in \mathbb{C}^2$ を固定点とし, $DF(a)$ の固有値 λ, λ' が $|\lambda'| < 1 < |\lambda|$ を満たすとき a を saddle point という. すると, saddle point a に対し, 非特異な全単射正則写像 $H : \mathbb{C} \to W^u(a)$ で

$$F \circ H(t) = H(\lambda t), \quad (t \in \mathbb{C})$$

を満たすものが存在する. これにより, $W^u(a)$ を不安定多様体と呼ぶことができる. $W^s(a)$ も同様に安定多様体となる.

主な結果. 上の写像を $H(t) = (h_1(t), h_2(t))$ と表す.

定理. h_1, h_2 は整関数であり,

$$\rho = \operatorname{ord} h_1 = \operatorname{ord} h_2 = \frac{\log d}{\log |\lambda|}$$

が成り立つ. 特に, h_1, h_2 は超越整関数になる.

定理. $P(x, y)$ を非定数の 2 変数多項式とするとき, $P \circ H$ は超越整関数になり, 必ず可算無限個の零点を持つ. 特に, $W^u(a)$ は任意の一次元代数多様体と可算無限個の点で交わる.

さて, $\widetilde{K} = H^{-1}(K^+)$ を unstable slice と呼ぶ. 従来の Yoccoz の不等式の証明では $\widetilde{K}$ の連結性が仮定されていたが, 次の結果を得た.

定理. unstable slice の原点を含む連結成分が一点でないなら, $\widetilde{K}$ に対して combinatorial rotation number p/q, サイクル数 N が定まり, 適当な分枝 $\tau = \log \lambda$ に対し, Yoccoz の不等式

$$\frac{\operatorname{Re} \tau}{|\tau - 2\pi i p/q|^2} \geq \frac{Nq}{2 \log d}$$

が成り立つ.

なお, この証明は一変数の場合でも新しい結果であり, 次を得た. $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を多項式とし, $K = \{x \in \mathbb{C} \mid \{P^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界 $\}$, a を P の固定点で $|P'(a)| > 1$ を満たすものとする.

定理. K の a を含む連結成分が一点でないなら, Yoccoz の不等式が成り立つ.

さて, K^+ と saddle point の関係を見よう. a を saddle point とする. $W^s(a)$ に接触する集合は iterate と共に a に接近し, 極限では $W^u(a)$ に衝突して跡を残す. この議論により次を得る.

命題. $W^s(a)$ のある点が $\operatorname{int} K^+$ から accessible ならば, $\widetilde{K}$ の原点を含む成分は一点ではない.

ところが, $\operatorname{int} K^+$ が空でないにもかかわらず, $W^u(a)$ で Yoccoz の不等式が成り立たない例が存在する. その一つが

$$F(x, y) = (y, y^2 - 2 - 0.7x)$$

である. 実際, $x = y = -0.8$ は sink なので, $\operatorname{int} K^+$ は空でない. また $x = y = 2.5$ は saddle point で, Yoccoz の不等式が成り立たないことも容易に示される. さらに, $W^s(a)$ は ∂K^+ で稠密である

ことが知られており, その任意の点が $\operatorname{int} K^+$ から accessible でない奇妙な例である. また, sink の吸引領域は Fatou-Bieberbach domain なので, 擬凸でもある.

以下, $|\delta| < 1$ と仮定する. 一般に, $\operatorname{int} K^+$ の各成分を Fatou 成分と呼ぶ. Bedford–Smillie (1991) は次の結果を得た.

定理. Fatou 成分は次のように分類される.

$$\begin{cases} \text{遊走領域} \\ \text{周期領域} \begin{cases} \text{非再帰領域} \\ \text{再帰領域} \begin{cases} \text{沈点の吸引領域} \\ \text{Siegel シリンダ} \\ \text{Herman シリンダ} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

この分類にはまだ不明な点が多いが, 特に Herman シリンダは存在するかどうかわかっていないので, その構造を調べることにする.

以下の性質を満たす $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^2$ を Herman 環という. $\mathcal{H}$ は周期 p の周期集合である. $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid r_1 < |\zeta| < r_2\}$ を円環としたとき $\varphi : A \to \mathcal{H}$ という全単射の正則写像が存在する. さらにある無理数 θ に対し $b = e^{i\pi\theta}$ とおくと, φ は $f^p(\varphi(\zeta)) = \varphi(b\zeta)$ をみたす. ただし, $\mathcal{H}$ は包含関係について最大のものをとるとする.

一般に $X \subset \mathbb{C}^2$ に対し $W_0^s(X) = \bigcup_{C \subset X:\text{compact}} W^s(C)$ と定める. このとき, Herman 環 $\mathcal{H}$ に対し $W_0^s(\mathcal{H})$ を Herman シリンダという.

まず, Herman シリンダの構造を 3 通りに分類した. $a \in A$ に対し, $\widetilde{K}_a$ を対応する stable slice とする. このとき

命題. $\widetilde{K}_a$ は

(1) $\widetilde{K}_a$ はコンパクトな成分を持たない,

(2) $\widetilde{K}_a$ の原点を含む連結成分は非有界かつ, $\widetilde{K}_a$ はコンパクトな成分を持つ,

(3) $\widetilde{K}_a$ はコンパクトな成分しか持たない.

と分類され, さらに $|\zeta| = |a|$ なる任意の $\zeta \in A$ に対し, $\widetilde{K}_a$ と $\widetilde{K}_\zeta$ は同じ分類に入る.

さらに, 次の部分的結果を得た.

定理. 上の分類の (1) は実際には存在しない.

この定理から特に $\widetilde{K}_a$ が連結ではあり得ないこともわかる.