論文審査の結果の要旨

論文提出者氏名： 神　　貞　介

論文題名：Dynamics of Polynomial Automorphisms of $\mathbb{C}^2$

($\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型の作る力学系)

論文提出者、神貞介は、提出論文において $\mathbb{C}^2$ の上の多項式自己同型写像（特に一般 Hénon 写像）の定義する力学系の研究を行った．特に鞍点型不動点の不安定多様体上のジュリア集合のスライスの連結度と，不安定方向の固有値の間の関係を与える「Yoccoz の不等式」を得た．彼の値分布論を用いた証明は，オリジナルの１次元の場合の Yoccoz の不等式についても新証明を与えるもので，連結性に関する仮定を弱くすることを可能にした．また，存在・非存在について未解決である Herman 円環・円筒についてその横断的スライスについて研究し，Herman 円環が存在するとした場合のスライスの特性に関する結果を得た．

研究の背景：一般にカオス的な挙動を示す力学系の研究では，その軌道や不変集合，分岐の様子について詳細な結果を得ることが難しい場合が多いが，複素力学系の場合は複素解析的手法を用いてより精密な結果を得られる場合がある．特に１次元複素力学系では，擬等角写像論，単葉関数論，ポテンシャル論，タイヒミュラー空間論など様々な複素解析的手法により，個々の写像や，写像族の分岐などについて活発な研究が行われている．ところが，高次元（２次元以上）の複素力学系については，これらの手法のうち大部分が適用できなくなり，数多くの問題が未解決のまま残されている．高次元複素力学系で最もよく研究されているのは，$\mathbb{C}^2$ の上の多項式自己同型写像のうち非常に簡単な場合を除くと，一般 Hénon 写像と呼ばれる，

$$g(x,y) = (y, p(y) - \delta x) \qquad (p(y)\text{ は多項式}, \delta \neq 0\text{ は定数})$$

の形の写像のいくつかの合成に帰着する．一般 Hénon 写像に関してほとんど唯一といって良い成功した例は，Bedford-Smillie, Fornaess-Sibony らによる多重ポテンシャル論を利用した研究で，軌道の無限遠への発散の速度から定義されるポテンシャルから不変カレントおよび不変測度を構成することに成功している．しかし，$\mathbb{C}^2$ を力学系がカオス的挙動をするジュリア集合と，比較的安定な挙動をするファトゥー集合に分けたときのそれぞれの集合の構造などについては，未解決の問題が多い．

鞍点型不動点の不安定多様体：一般 Hénon 写像 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が鞍点型不動点 a （不動点であって，そこでの F の微分の固有値が１個は単位円の外に，もう一個は単位円の内部にある場合）を持つとき，F^{-1} によって軌道が a に近づく点全体は，はめ込まれた解析的多様体になり，不安定多様体 $W^u(a)$ と呼ばれる．$W^u(a)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数の組 $H(t) = (h_1(t), h_2(t))$ によりパラメトライズされ，その上の力学系の作用は，t-平面上の不安定固有値 λ 倍と共役になる．

論文提出者は，$h_1(t), h_2(t)$ は，位数が $\log d / \log |\lambda|$ （ただし，d は F の次数）の超越整関数になることを示し，さらに 任意の定数でない２変数多項式 $P(x,y)$ に対し，$P \circ H$ は

Picard の意味の除外値を持たないことを示した．これは，不安定多様体 $W^u(a)$ が任意の 1 次元代数多様体と無限個の交点を持つことを意味する．

Yoccoz 型不等式：1 変数多項式 $P(z)$ の定義する複素力学系に関し，Yoccoz は次のような結果を得た．$P(z)$ のジュリア集合が連結のとき，$P(z)$ の反発的不動点 a に対し，有限個の外射線（$\mathbb{C}\setminus K_P$ をリーマン写像により単位円の外部に写したとき，単位円に直交する半直線に対応する曲線）が存在し，それらは円周上の回転と同じような配列で互いに移りあう．この回転数（有理数 p/q となる）を不動点 a の組み合わせ的回転数と呼ぶ．このとき，$\lambda = P'(a)$ とおき，$\log\lambda$ の適当な枝を選ぶと，次の不等式（Yoccoz の不等式）が成立する．

$$\frac{Re\ \log\lambda}{|\log\lambda - 2\pi ip/q|^2} \geq \frac{Nq}{2\log\deg P}.$$

この結果は，例えば，2 次多項式のパラメータ空間に現れる分岐集合である Mandelbrot 集合 M の構造の解析に応用され，最も重要な未解決問題の一つである M の局所連結性予想を，各双曲的成分の境界上で示すのに用いられた．

論文提出者は，これを一般 Hénon 写像の鞍点型不動点に拡張すると共に，連結性に関する仮定を弱めることに成功した．まず，一般 Hénon 写像 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対し，軌道が（時間の前方にも後方にも）有界になる点の全体を K とする．鞍点型不動点 a に対し，その不安定多様体をパラメトライズする $H:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ をとり，$\tilde{K} = H^{-1}(K)$ とおく．$\tilde{K}$ が *bridged* とは，0 を含む $\tilde{K}$ の連結成分が 1 点ではないことをいう．(論文提出者は同値な条件をいくつか与えている.) $\tilde{K}$ が bridged のとき，論文提出者は $\mathbb{C}\setminus\tilde{K}$ が有限個の連結成分からなり，それらは，a の不安定固有値 λ 倍により，円周上の有理数回転と同じような配列で互いに移りあうことを示し，次の不等式を得た．

$$\frac{Re\ \log\lambda}{|\log\lambda - 2\pi ip/q|^2} \geq \frac{Nq}{2\log\deg F}.$$

ここで，p/q は組み合わせ的回転数，N は $\mathbb{C}\setminus\tilde{K}$ の成分からなるサイクルの数である．

論文提出者の証明は，前方ジュリア集合 K^+ に対応するグリーン関数 $G^+(x,y)$ をとり，劣調和関数 $u(t) = G^+\circ H(t)$ を考え，これに劣調和関数の遠方での挙動に関する Tsuji の定理（劣調和関数の値分布論）を適用することにより求める不等式を得るものであった．以前にも Hénon 写像に関する Yoccoz の不等式は，Bedford-Smillie や Buff-Hubbard により試みられてはいたが，それらは $\tilde{K}$ が連結という仮定をおくものであったが，bridged という仮定はそれを大幅に弱めるものである．さらに，同じ方法は，1 変数のオリジナルの Yoccoz の不等式にも適用でき，仮定を連結から bridged に置き換えることが可能になった．1 変数の多項式について言えば，ジュリア集合が連結であるためには，全ての臨界点が充填ジュリア集合に含まれる必要があったが，1 個しか臨界点が充填ジュリア集合に含まれない場合でも bridged になりうる．このことからも Yoccoz 不等式の適用範囲が格段に拡がったことがわかる．

Herman 円環の存在問題：1 変数の複素力学系の研究では，Sullivan によるファトゥー集合の分類が一つの節目であり，それにより個々の写像の特性の研究が大きく進んだ．2 変数以上，例えば一般 Hénon 写像でも，同様の結果を得ることは非常に重要であると思われるが，様々な困難により完全な解決には至っていない．その中の一つの問題が，Herman 円環の存

在問題である．Herman 円環とは，１次元部分多様体 A で，その上の力学系 F の作用が円環 $\{1 < |z| < R\}$ 上の無理数回転 $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$ （θ は無理数）と共役なもので，さらに，F が体積縮小の場合には，A のある近傍上の軌道がすべて A に収束するものを言う．(ただし，このような極大なものをとり，円盤に拡張されてしまうものは除く．) １変数多項式の場合には最大値の原理から円環教のファトゥー成分の非存在が示されており，一般 Hénon 写像でも Herman 円環は存在しないのではないかと予想されているが，現在まで未解決である．

論文提出者はこの問題に関し，非存在を証明しようとして，完全な解決には至らなかったが，部分的な結果を得た．その手法は，以前の不安定多様体に関する結果を拡張するものである．まず，体積縮小の一般 Hénon 写像に Herman 円環が存在すると仮定し，Herman 円環に横断的な方向に一般化された不安定多様体を構成し，そのパラメータ付け $H_a(t)$ を得た．(ここで a は Herman 円環上の１点) このパラメータ付けに関し，前と同様に $\tilde{K}_a$ を定義し，その連結性に応じて３通りに分類した．すなわち，

(1) $\tilde{K}_a$ はコンパクトな成分を持たない．

(2) $\tilde{K}_a$ の原点を含む連結成分は非有界，かつ $\tilde{K}_a$ はコンパクトな成分も持つ．

(3) $\tilde{K}_a$ はコンパクトな成分しか持たない．

このうち，論文提出者は (1) の場合が起こりえないことを示した．これは完全な解決ではないが，何も知られていなかった Herman 円環の問題に関する重要なステップであると考えられる．

これらの結果は今後の複素力学系研究において重要な意義をもつものと思われる。よって論文提出者，神貞介は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．