論文の内容の要旨

論文題目　Homogenization problems for a class of stochastic partial differential equations
（あるクラスの確率偏微分方程式に対する均質化問題）

氏　　名　市原直幸

本論文では、空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上に値をとる次のような確率微分方程式に対する均質化問題を考える：

$$\begin{cases} dp_t^\epsilon = L^\epsilon(p_t^\epsilon)\,dt + M^\epsilon(p_t^\epsilon)\,dY_t\ , \quad 0 \le t \le T, \\ p_0^\epsilon = p\ \in L^2(\mathbb{R}^d)\ , \end{cases} \tag{1}$$

ただし、$\epsilon > 0$ はパラメータとし、$Y = (Y_t)$ は $\mathbb{R}^n$ 上に値をとる Brown 運動、$L^\epsilon : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ は周期的な係数を持つ２階の偏微分作用素、$M^\epsilon : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}^d))^n$ は一般に非線形の作用素とする。方程式 (1) は通常の偏微分方程式にノイズ項の加わった方程式と考えることができる。またこの方程式は、非線形フィルタリング問題を考える際に現れる Zakai 方程式と呼ばれるクラスを含んでいる。我々の目的は、様々な偏微分作用素 L^ϵ, M^ϵ に対する (1) の解 p^ϵ について、以下の２つの命題を示すことである。

(a) $\epsilon \to 0$ とするときの p^ϵ の適切な意味での収束。

(b) 極限 p^0 の満たすべき方程式の特定。一般に p^0 は定数係数の確率偏微分方程式

$$\begin{cases} dp_t^0 = L^0(p_t^0)\,dt + M^0(p_t^0)\,dY_t\ , \quad 0 \le t \le T, \\ p_0^0 = p\ \in L^2(\mathbb{R}^d)\ , \end{cases} \tag{2}$$

をみたすので、(2) に現れる作用素 L^0, M^0 を具体的に決定する。本論文では命題 (a),(b) を均質化問題と呼ぶことにする。この種の問題は Bensoussan によって非線形フィルタリング問題との関連で論じられた（[1] 参照）。[1] において Bensoussan は L^ϵ, M^ϵ として

$$L^\epsilon(\phi)(x) = \sum_{i,j} D_i\left(a_{ij}(x/\epsilon)\,D_j\phi(x)\right) - \sum_i D_i\left(g_i(x/\epsilon)\,\phi(x)\right),$$

$$M_k^\epsilon(\phi)(x) = h_k^\epsilon(x)\,\phi(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

を考え、$h^\epsilon(x) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} h(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$ という条件のもとで、p^ϵ の $L^2(0,T;L^2_{-\lambda}(\mathbb{R}^d))$ での分布が p^0 の分布に弱収束することを示した。ここで 係数 $a=(a_{ij})$, $g=(g_i)$ は周期関数とし、 $L^2_{-\lambda}(\mathbb{R}^d)$ $(\lambda>0)$ は重みつき L^2 空間で、埋め込み $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2_{-\lambda}(\mathbb{R}^d)$ がコンパクトになるようなものとする。[1] で仮定されている h^ϵ に関する条件は、$h^\epsilon(x)=h(x/\epsilon)$ という形の周期関数を考えることができないという意味で強い仮定といえる。そこで我々は、周期関数 h を係数に持つ作用素を第1章で扱う。具体的には L^ϵ, M^ϵ として

$$L^\epsilon(\phi)(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x/\epsilon)\, D^2_{ij}\phi(x) + \epsilon^{-1}\sum_{i=1}^d b_i(x/\epsilon)\, D_i\phi(x)\,, \tag{3}$$

$$M^\epsilon_k(\phi)(x) = B_k(x/\epsilon, \phi(x))\,, \qquad k=1,\cdots,n\,. \tag{4}$$

を考え、(1) の解 p^ϵ が (2) の解 p^0 に適切な意味で収束することを解析的、確率論的双方のアプローチで証明する。ただし極限 (2) の係数は次のようにして決定される。まず L^ϵ から定まる d 次元トーラス $\mathbb{T}^d$ 上の微分作用素 $\mathcal{A} = a(y)\,\nabla_y\cdot\nabla_y + b(y)\,\nabla_y$, ($\nabla_y = (\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_d})$) に対して次の偏微分方程式

$$\begin{cases} \mathcal{A}\chi_k + b_k = 0\,, \quad k=1,\cdots d\,, \\ \int_{\mathbb{T}^d}\chi_k(y)\,m(y)\,dy = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{A}^* m = 0\,, \\ \int_{\mathbb{T}^d} m(y)\,dy = 1\,, \end{cases}$$

を考える。すると L^0, M^0 はこれらの解を使って次のように表わされる：

$$L^0(\phi)(x) = \sum_{ij}\langle\,(I+\nabla\chi)\,a\,(I+\nabla\chi)^*\,m\,\rangle_{ij}\, D^2_{ij}\phi(x)\,, \quad M^0_k(\phi)(x) = \langle\, B_k(\cdot,\phi(x))\,m(\cdot)\,\rangle\,, \tag{5}$$

ただし記号 $\langle\cdot\rangle$ は $\langle f\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(y)dy$ を表わし、$\langle\cdot\rangle_{ij}$ は行列の (i,j) 成分をあらわすものとする。解析的方法に関しては、(3), (4) を次の２通りの場合

$$(A)\ \begin{cases} L^\epsilon = A^\epsilon\,, \text{または}\ L^\epsilon = (A^\epsilon)^*\,, \\ M^\epsilon_k(\phi)(x) = h(x/\epsilon)\phi(x)\,, \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} L^\epsilon\phi(x) = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}(x/\epsilon)D_j\phi(x))\,, \\ M^\epsilon_k(\phi)(x) = B_k(x/\epsilon,\phi(x))\,, \end{cases}$$

$$A^\epsilon\phi = \sum_{ij} a_{ij}(x/\epsilon)\,D^2_{ij}\phi + \epsilon^{-1}\sum_i b_i(x/\epsilon)\,D_i\phi\,, \qquad D^2_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\,,$$

に制限して考え、それぞれの作用素を持つ確率偏微分方程式 (1) の解 (p^ϵ) に対して、確率変数族 $(m^\epsilon p^\epsilon)$ (ただし $m^\epsilon(x)=m(x/\epsilon)$ とおいた) の $C(0,T;H^{-1}_{-\lambda}(\mathbb{R}^d))$ での分布が、 (5) を作用素とする (2) の解 p^0 の $C(0,T;H^{-1}_{-\lambda}(\mathbb{R}^d))$ 上の分布に弱収束することを、無限次元空間上の確率微分方程式に対応するマルチンゲール問題の解として定式化することで証明する。([1] では作用素の具体形までは特定していない)。ここで $H^{-1}_{-\lambda}(\mathbb{R}^d)$ は重みつき Sobolev 空間で、埋め込み $L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{-1}_{-\lambda}(\mathbb{R}^d)$ がコンパクトになるような空間とする。作用素の扱いに関してこの方法はむしろ解析的であることに注意する。

一方確率論的証明については、作用素 (3), (4) を持つ確率偏微分方程式 (1) に対する均質化問題を、後ろ向き確率微分方程式を使った方法で証明する。係数にある程度の正則性を仮定すると、(1) の古典解 (つまり各 ω ごとに x に関して２階微分可能で t に関して連続) が存在し、その解 $p^\epsilon(t,x)$ は次のような

前向き・後ろ向き確率微分方程式の解として表現できる (いわゆる非線形ファインマン＝カッツの公式)：

$$\begin{cases} dX_s^\epsilon(t,x) = \epsilon^{-1}\, b\big(X_s^\epsilon(t,x)/\epsilon\big)ds + \sigma\big(X_s^\epsilon(t,x)/\epsilon\big)dW_s, & X_t^\epsilon(t,x) = x, \\ -dV_s^\epsilon(t,x) = B\big(X_s^\epsilon(t,x)/\epsilon, V_s^\epsilon(t,x)\big)\overleftarrow{dY_s} - U_s^\epsilon(t,x)dW_s, & V_T^\epsilon(t,x) = p(X_T^\epsilon(t,x)), \end{cases}$$

$$p^\epsilon(T-t,x) \underset{\text{同分布}}{\sim} V_t^\epsilon(t,x)\ , \qquad t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^d\ ,$$

ただし $\overleftarrow{dY_s}$ は後ろ向き伊藤積分を表すものとする。この解 $(X_s^\epsilon(t,x), V_s^\epsilon(t,x))$ の $\epsilon\to 0$ に関する挙動を調べることで $p^\epsilon(t,x)$ に対する収束定理を証明する。

また、我々は次のようなランダムな係数を持つ作用素も考える：

$$L^\epsilon(\phi)(x) = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}(x/\epsilon,\omega)\, D_j\phi(x)), \quad M_k^\epsilon(\phi)(x) = h_k(x/\epsilon,\omega)\,\phi(x)\ ,$$

ここで係数 $a=(a_{ij})$, $h=(h_k)$ は、ある確率空間 $(\mathbf{\Omega},\mathcal{F},\mu)$ 上の確率変数 $\mathbf{a}=(\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_k)$ と、エルゴード的シフト $\{\tau_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ （$\tau_x:\mathbf{\Omega}\to\mathbf{\Omega}$）を使って $a_{ij}(x/\epsilon,\omega)=\mathbf{a}_{ij}(\tau_{\frac{x}{\epsilon}}\,\omega)$, $h_k(x/\epsilon,\omega)=\mathbf{h}_k(\tau_{\frac{x}{\epsilon}}\,\omega)$ と表わされるような定常過程とする。このタイプのランダム項を含んだ偏微分方程式に対する均質化問題は既に詳しく調べられている。我々はこれらと類似の収束定理が確率偏微分方程式の場合も成立することを示す。即ち (1) の解 p^ϵ は、作用素

$$L^0(\phi)(x) = \sum_{i,j}\langle (I+\mathbf{f})\,\mathbf{a}\,(I+\mathbf{f})^*\rangle_{ij}\, D_{ij}^2\phi(x), \quad M_k^0(\phi)(x) = \langle\mathbf{h}\rangle_k\,\phi(x)\ ,$$

をもつ確率偏微分方程式に適切な意味で収束することを示す。ここで $\mathbf{f}=(\mathbf{f}_j^i)$ は関係式

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{f}_\cdot^i, \mathbf{u})_{L^2(\mathbf{\Omega})} = -(\mathbf{a}_{i\,\cdot}, \mathbf{u})_{L^2(\mathbf{\Omega})}\ , \qquad (\forall\ \mathbf{u})$$

をみたす $\mathbf{\Omega}$ 上の確率変数である。

第２章では前章とは異なるタイプの作用素を扱う。具体的には L^ϵ, M^ϵ として

$$L^\epsilon(\phi)(x) = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}(x/\epsilon, Z_t^\epsilon/\epsilon)\, D_j\phi(x))\ , \quad M_k^\epsilon(\phi)(x) = h_k(x/\epsilon, Z_t^\epsilon/\epsilon)\,\phi(x)$$

を考える。ここで $Z^\epsilon=(Z_t^\epsilon)$ は次の $\mathbb{R}^n$ 上の確率微分方程式

$$dZ_t^\epsilon = f(Z_t^\epsilon/\epsilon)\,dt + Q\,dY_t\ , \qquad Z_0^\epsilon = \zeta\ ,$$

の解とする。ただし f は周期関数とし、Q は正定値の定数行列とする。係数 a, h が第二成分に依存しない関数であれば、L^ϵ, M^ϵ は第１章で考えたものに含まれる。第２章では、(1) に対する解 p^ϵ の $S=C(0,T;H^{-1}_{-\lambda}(\mathbb{R}^d))$ 上の分布 Π^ϵ が、(2) に対する解 p^0 の S 上の分布 Π^0 に弱収束することを示し、極限方程式を具体的に決定する。作用素 L^0, M^0 は、L^ϵ と (Z_t^ϵ) の生成作用素 A^ϵ から決まる $(d+n)$ 次元トーラス $\mathbb{T}^{d+n}$ 上の微分作用素 $\mathcal{A}=\nabla_{\hat{x}}\cdot(\,a(\hat{x},\hat{y})\,\nabla_{\hat{x}}\,)+A\,\nabla_{\hat{y}}\cdot\nabla_{\hat{y}}$ （ただし $2A=Q^*Q$）に関する微分方程式

$$\begin{cases} \mathcal{A}\chi_k + b_k = 0 \\ \int_{\mathbb{T}^{d+n}} \chi_k(\hat{x},\hat{y})\, d\hat{x}d\hat{y} = 0 \end{cases}$$

の解 χ_k, $(k=1,\cdots,d)$ を使って次のように表わせる：

$$L^0(\phi)(x) = \sum_{i,j} \langle\, (I+\nabla_{\hat{x}}\chi)\, a\, (I+\nabla_{\hat{x}}\chi)^* + (\nabla_{\hat{y}}\chi)^* A\, \nabla_{\hat{y}}\chi\, \rangle_{ij}\, D_{ij}^2 \phi(x)$$
$$+ \sum_i \langle\, (h\cdot Q + f)\, \nabla_{\hat{y}}\chi\, \rangle_i\, D_i\phi(x)$$
$$M_k^0(\phi)(x) = \langle\, h\, \rangle_k\, \phi(x)\ ,$$

ただし記号 $\langle\cdot\rangle$ は $\langle f\rangle = \int_{\mathbb{T}^{d+n}} f(\hat{x},\hat{y})d\hat{x}d\hat{y}$ を表わす。ランダム項 Z^ϵ の影響で L^0 は第 1 章で得られたものとは異なっていることに注意する（L^0 の中に h の項があることから M^ϵ にも依存して決まっていることがわかる。前章では M^0 は L^ϵ に依存して決まったが、L^0 は M^ϵ に依存せずに決まっていた)。

第 3 章では作用素

$$L^\epsilon(\phi)(x) = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}(x/\epsilon)\, D_j\phi(x)) - \sum_i D_i(g_i(x/\epsilon, v_t), \phi(x))\ , \quad M_k^\epsilon(\phi)(x) = h_k(x/\epsilon)\,\phi(x)$$

を持つ確率偏微分方程式に対する均質化問題を考える。ここで $v(\cdot) \in L^2(\Omega\times[0,T])$ は与えられた $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s; s\le t)$-適合な確率過程とする。我々の目標は第 1 章で考えた収束よりも強い意味での収束を示すことである。具体的には $v(\cdot)\in L^2(\Omega\times[0,T])$ を固定するごとに決まる (1), (2) の解 $p^{\epsilon,v}$, $p^{0,v}$ に対して収束 $E[|p^{\epsilon,v}(t)-p^{0,v}(t)|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}]\to 0$ を、適切な補正項 $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ をとることにより

$$\sup_v \sup_{0\le t\le T} E[\,|p^{\epsilon,v}(t) - p^{0,v}(t) - \epsilon\, p^{(1)}(t) - \epsilon^2 p^{(2)}(t)|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}] \longrightarrow 0$$

という形で証明する。特にこの収束は $v(\cdot)\in L^2(\Omega\times[0,T])$ のとり方によらないものであることがわかる。この事実の簡単な系として、以下のような確率制御問題の値関数に関する収束定理を示すことができる：

$$\left| \inf_{v(\cdot)} J_p^\epsilon(v(\cdot)) - \inf_{v(\cdot)} J_p^0(v(\cdot)) \right| \longrightarrow 0 \qquad \epsilon\to 0$$

ただし $J_p^\epsilon(v(\cdot))$ ($\epsilon>0$ あるいは $\epsilon=0$) は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の適当な汎関数 $R(\cdot)$, $G(\cdot)$ を使って

$$J_p^\epsilon(v(\cdot)) = E\left[\int_0^T R(p^{\epsilon,v}(t))\, dt + G(p^{\epsilon,v}(T))\right]$$

という形で表わせる費用関数である。この種の無限次元空間上での確率制御問題は、部分可観測の確率制御問題を考える際にしばしば現れる。

参考文献

[1] BENSOUSSAN,A., *Homogenization of a class of stochastic partial differential equations*, Composite media and homogenization theory (Trieste, 1990). Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **5**, pp. 47-65 Birkhauser Boston, (1991)