論文審査の結果の要旨

氏名　市原直幸

微視的な分子レベルにおいて周期構造をもつような媒体内にある物質の巨視的様相を調べる問題は「均質化」とよばれる。微視的な周期構造は巨視的レベルでは激しく振動する量となって現れるが、それは巨視的スケール極限の下で適当な意味で平均化され均一化されるのである。数学的には均質化は、周期係数をもつ（例えば2階の）偏微分方程式に対する特異極限の問題として定式化され、解析的な側面あるいは確率論的な側面からこれまでに膨大な量の研究がなされてきた。周期係数は、ランダムな係数をもつ場合に自然に一般化されることが知られている。

論文提出者市原直幸は、対象とする偏微分方程式のクラスを拡張し、時間に関するホワイトノイズを係数として含むような場合、すなわち、確率偏微分方程式を考え、それに対する均質化の問題を考察した。このような方程式はランダムな係数をもつ偏微分方程式ととらえることができるが、係数に含まれるホワイトノイズは超関数であり、上記の一般化の枠組みには入らず、これまでに殆ど研究がなされていない対象であった。

市原の得た結果は、以下の4点である。

1. 確率偏微分方程式に対する均質化問題については過去に Bensoussan (1991年) による研究があるが、ホワイトノイズにかかる係数はある関数に単純に各点収束するとの仮定が必要であった。市原は、ホワイトノイズの係数が微視的レベルで周期構造をもつ場合に、非線形の場合も含めて考察した。このような場合には、均質化の影響をホワイトノイズ項についても詳しく調べる必要が生ずる。市原は、確率偏微分方程式の解が属する空間の位相を弱めることによりこの問題を解決した。より具体的に述べると、Bensoussan の仮定の下では通常の関数空間、L^2-空間内で論ずることが可能であるが、それを超関数のクラス H^{-1}-空間 (重みつきソボレフ空間) において考えれば、係数が各点収束しないような場合に結果を拡張することができることを証明したのである。

2. 上記の結果は、H^{-1}-空間、すなわち無限次元空間上のマルチンゲール問題の解の収束として論ずることができるが、市原は他の手法として、逆向き確率微分方程式 (Backward SDE) に基づく方法についても考察した。逆向き確率微分方程式は非線形偏微分方程式に対応する確率過程を定めるために Pardoux と Peng により導入されたもので、多くの応用をもつことが知られている。係数にホワイトノイズを含まない場合の均質化問題について、逆向き確率微分方程式に基づくアプローチは最近 Buckdahn らに

よって論じられているが、市原の結果は、それを係数にホワイトノイズが含まれるような場合にまで拡張するものである。

3. さらに、確率偏微分方程式の係数の中に、ホワイトノイズとは異なる確率過程が含まれるという意味で、二重にランダムな構造をもつ場合について論じた。このような確率偏微分方程式は、非線形フィルタリング問題と関連して自然に現れ、Zakai 方程式とよばれている。係数に含まれる確率過程の均質化への寄与は、上記の 1、2 の結果と基本的に異なるものであることが示された。

4. 最後に、確率偏微分方程式に関する本質的に非線形な均質化問題の例として、確率制御問題を取り上げた。すなわち、制御項をもつ確率偏微分方程式の族を考え、その値関数 (費用関数) の均質化の下での挙動について考察した。市原が取り扱った系では、確率偏微分方程式の解は均質化の下で制御項について一様に収束することが示され、その帰結として値関数の収束が証明された。

これらはいずれも重要な結果であり、均質化問題に対する新しい視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により、論文提出者市原直幸は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。