論文の内容の要旨

論文題目 **HARMONIC ANALYSIS AND GEOMETRY ON CLOSED MANIFOLDS**
（閉多様体上の調和解析と幾何）

氏　　名　　許　　斌

本論文は独立な二つ部分を含み，それぞれが多様体上の調和解析と幾何に関する研究である．具体的には, 前者において, 閉 Riemann 多様体上のスペクトル関数と固有関数の漸近的性質を調べた．後者において，調和写像と同境理論の閉多様体上の変換群理論への新しい応用を与えた.

まず, Riemann 多様体上のスペクトル関数と固有関数に関する研究について述べる．M^n を閉 Riemann 多様体とし，Δ を M^n 上の正定値の Laplace-Beltrami 作用素とする．Δ の区間 $[0,\lambda^2]$ におけるスペクトル射影作用素の積分核 $e(x,y,\lambda)$ を Δ のスペクトル関数と言い，区間 $[\lambda^2,(\lambda+1)^2]$ におけるスペクトル射影作用素を χ_λ で表す．このとき，次の重要な結果がある:
(ア) (Hörmander, 1968) $\lambda\to\infty$ のとき，次式が成り立つ:

$$e(x,x,\lambda)=\frac{\lambda^n}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(1+\frac{n}{2})}+\mathrm{O}(\lambda^{n-1})\ .$$

(イ) (Sogge, 1988) $p\in[2,\,\infty]$, $\lambda\to\infty$ のとき，$\chi_\lambda: L^2(M)\to L^p(M)$ の作用素ノルムは次のような精確な評価をもつ:

$$||\chi_\lambda||_{(L^2(M),\,L^p(M))}=\mathrm{O}(\lambda^{\epsilon(n,p)})\ .$$

ここに $\epsilon(n,p)=\begin{cases}\frac{(n-1)(p-2)}{4p} & \text{if } 2\le p\le\frac{2(n+1)}{n-1},\\ \frac{p(n-1)-2n}{2p} & \text{if } \frac{2(n+1)}{n-1}\le p\le\infty.\end{cases}$

(ア) 及び (イ) はそれぞれ，多様体上の固有値の漸近的な性質と Bochner-Riesz 総和問題の研究に本質的な役割を果たした．波動方程式の手法を使って，私は (ア) 及び (イ) の次のような一般化を得た:

(ア$'$) M のある十分小さい測地座標系 (X, x) の下で，任意の多重指数 α, β に対して，$\lambda \to \infty$ のとき，次のような漸近式が成り立つ:

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta e(x,y,\lambda)|_{x=y} = \begin{cases} \frac{(-1)^{(|\alpha|-|\beta|)/2} \prod_{j=1}^n (\alpha_j+\beta_j-1)!!\, \lambda^{n+|\alpha+\beta|}}{\pi^{n/2}\, 2^{n+|\alpha+\beta|/2}\, \Gamma(\frac{|\alpha+\beta|+n}{2}+1)} + \mathrm{O}(\lambda^{n+|\alpha+\beta|-1}) & \text{if } \alpha \equiv \beta \pmod 2, \\ \mathrm{O}(\lambda^{n+|\alpha+\beta|-1}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここに $(-1)!! = 1$, 正整数 m に対して $(2m-1)!! = (2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1$ とする．$\alpha \equiv \beta \pmod 2$ とは任意 $1 \le j \le n$ について $\alpha_j \equiv \beta_j \pmod 2$ であるとする．

(イ$'$) $p \in [2, \infty]$, $\lambda \to \infty$ のとき，$\chi_\lambda : L^2(M) \to H_k^p(M)$ (k 階微分まで L^p 空間に入る関数の全体のなす Sobolev 空間) の作用素ノルムは次のような精密な評価をもつ:

$$||\chi_\lambda||_{(L^2(M),\, H_k^p(M))} = \mathrm{O}(\lambda^{\epsilon(n,p)+k})\ .$$

(ア) と (イ) と同じように, (ア$'$) と (イ$'$) も基本的な結果であるので, 今後解析における様々な問題への応用が期待できる.

次に調和写像を正でない断面曲率をもつ多様体上の変換群に適用して得られた結果を紹介する．1948 年に Bochner により, 負定値の Ricci テンソルをもつコンパクト Riemann 多様体の距離同型群が有限群であることが示された．さらに 1966 年に T.T.Frankel により, 正でない断面曲率かつ負定値の Ricci テンソルをもつコンパクト Riemann 多様体 N 上の恒等写像とホモトープな距離同型写像が恒等写像に他ならないことが証明された. 私は N の上に効果的かつ滑らかに働くコンパクトな Lie 群 G を考えた. ある位相的な条件を満たす Riemann 多様体 N への調和写像の剛性（自身とホモトープな調和写像が自身に他ならないこと）を示した上で, Lie 群 G は実は有限群であり, G の中の恒等写像とホモトープな元が恒等写像に他ならないことを証明し, T.T.Frankel の結果を一般化した．さて, 一時的に話を aspherical な多様体上の変換群に移す．普遍被覆空間が可縮である多様体を aspherical と言う．正でない断面曲率をもつ Riemann 多様体はその特例である．1970 年に P.Conner と F.Raymond は次の事実を発見した: A をコンパクトかつ aspherical な多様体とし, A の上に効果的に働くコンパクトかつ連結な Lie 群がトーラス群であり, 群の次元が $\pi_1(A)$ の中心のランクに押さえられる．多様体 A 上の群作用の中のすべての元が A の恒等写像とホモトープであれば, この群作用がホモトープに自明と言う．1985 年 D.H.Gottlieb, K.B. Lee と M.Özaydin は次の結果を示した：A の上にホモトープに自明かつ効果的に働くコンパクトな Lie 群は可換である．N を正でない断面曲率をもつコンパクトで実解析的な Riemann 多様体とし, G を N の上にホモトープに自明, 実解析的かつ効果的に働くコンパクトな Lie 群とする．このとき, 私はある技術的な仮定の下で Gottlieb-Lee-Özaydin の結果を精密化した：G が $\pi_1(N)$ の中心のランクに等しければ, G はトーラス群である.

もう一つ調和写像の変換群への応用として, ある多様体の対称性に対する最良な評価を与えた. M を滑らかな多様体とし, M の上に効果的かつ滑らかに働く全てのコンパクトな Lie 群の次元の上限を $N(M)$ で表し，M の対称度と言う．コンパクトな半単純 Lie 群を考えれば，M の半単純対称度 $N_s(M)$ も定義できる．

大まかな意味で, $N(M)$ 及び $N_s(M)$ は多様体 M の対称性を計る量であり, M の位相と微分構造に強く依存する．以下の文章において，特に断らない限り，出てくる全ての多様体は滑らかで連結な閉多様体とする．Frobenius と Birkhoff による古典的な結果がある： 任意の n 次元多様体 M^n に対して, $N(M^n) \leq \langle n \rangle$ ($\langle n \rangle := n(n+1)/2$) が成り立つ． ただし等号が成立するため必要十分条件は M^n が n 次元標準球面 S^n あるいは実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ と微分同相である．多様体 M^n が適当な（微分）位相的な条件を満たすとき, その対称度が $\langle n \rangle$ より小さくなると予想される．そこで， 私は次の三種類の (微分) 位相的な制限の対称度への影響を調べた.

I 1 次元コホモロジー群

1985 年 D. Burghelea と R. Schultz は位相的な手法を用いて, n 次元多様体 M の上に $H^1(M;\mathbf{R})$ の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在して, それらのカップ積 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ が $H^n(M;\mathbf{R})$ で消えないとき, $N_s(M) = 0$ を示した.
第 1 Betti 数 $b_1 \neq 0$ の向き付けられた Riemann 多様体 M から b_1 次元平坦トーラスへの M の Albanese 写像と呼ばれる標準調和写像が存在する．Albanese 写像の固有の性質と調和写像の一意接続性を活用して, 私は次の結果を示した：

(i) 多様体 M^n の第一 Betti 数が 3 以上かつ次元 n が 5 以上のとき, $N(M) \leq \langle n-2 \rangle$.

(ii) $H^1(M;\mathbf{R})$ の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ が存在して, それらのカップ積 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k$ が $H^k(M;\mathbf{R})$ で消えないとき, $N(M) \leq \langle n-k \rangle + k$, $N_s(M) \leq \langle n-k \rangle$.

(iii) (ii) の仮定の下で, もし $b_1 > k \geq 3$ かつ次元 n が $k+3$ 以上のとき, $N(M) \leq \langle n-k \rangle + k - 2$.

明らかに (ii) は Burghelea-Schultz の結果より強い．なお, (i)-(iii) で等式が成立する例も容易に作ることができる．

II 正でない曲率をもつ Riemann 多様体上ファイバー・バンドル

1969 年 H.T.Ku, L.N.Mann, J.L.Sicks と J.C.Su は積多様体の対称度を調べ，次の結果を得た: $N(M_1^{n_1} \times M_2^{n_1}) \leq \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle$ ($n_1 + n_2 \geq 19$), 等号が成り立つ必要十分条件は M_1, M_2 が標準球面或は実射影空間と微分同相になることである．V を正でない断面曲率をもつ実解析的な Riemann 多様体とする．1972 年 H.B.Lawson と S-T.Yau は $N(V)$ が $\pi_1(V)$ の中心のランクに等しいことを示し，1979 年 R.Schoen と S-T.Yau はある位相条件をみたす V へのホモトープな調和写像の全体となす空間を特徴付けた．以下 E を V 上の連結なファイバー F^m をもつコンパクトなファイバー・バンドルとする．彼らの結果と同境理論を用いて，私は次の結果を得た：

(iv) $N(E) \leq \langle m \rangle + N(V)$, $N_s(E) \leq N_s(S^m)$, $N(S^m \times V) = N(S^m) + N(V)$, $N_s(S^m \times V) = N_s(S^m)$.

(v) k を 1 或は 5 以上の整数とする．ファイバー F^{4k} を向きつけ可能で，ゼロでない符号数をもつとし，E も向きつけ可能とする．このとき，$N(E) \leq 4k(k+1) + N(V)$. さらに，V が向きつけ可能であれば, $N(\mathbf{C}P^{2k} \times V) = N(\mathbf{C}P^{2k}) + N(V) = 4k(k+1) + N(V)$. ここに $\mathbf{C}P^n$ が n 次元複素射影空間である.

(vi) ファイバー F^4 が S^4 或は $\mathbf{R}P^4$ と 2 を法とする同境でなければ, $N(E) \leq N(V) + 8$, $N_s(E) \leq 8$. 特に, $N(\mathbf{C}P^2 \times V) = N(V) + 8$, $N_s(\mathbf{C}P^2 \times V) = 8$.

(iv)-(vi) はある意味で Ku-Mann-Sicks-Su の結果を精密化したと言える．さらに, (iv)-(vi) の中の等式は評価式が最良であることを主張し，等式そのものも興味深い．

III 正でない曲率をもつ Riemann 多様体上のスピン束

1970 年に Atiyah と Hirzebruch は指数定理で次の有名な定理を示した：ゼロでない $\hat{A}$ 種数をもつスピン多様体の対称度はゼロである．Schoen-Yau の結果とスピン同境理論を用いて，私は Atiyah-Hirzebruch の定理のバンドル版を作った:

(vii) F をゼロでない $\hat{A}$ 種数をもつスピン多様体とし，E もスピンとする．このとき，$N(E) \leq N(V)$, $N_s(E) = 0$. さらに，V がスピンであれば，等式 $N(V \times F) = N(V)$ が成り立つ．

Ω_*^{spin} をスピン同境環とし, Ω_*^{spin} から $KO^{-*}(\mathrm{point})$ への自然な環準同型を $\hat{\mathscr{A}}_*$ とする．特に $8q+1$ 或は $8q+2$ 次元のスピン多様体 X の $\hat{\mathscr{A}}_*$ による像が $\mathbf{Z}/2$ に入り, X の α 不変量をいう．1972 年 R.Schoen と S-T.Yau は, $8q+1$ 或は $8q+2$ 次元のスピン多様体 X の α 不変量が消えなければ, $N_s(X) = 0$ を証明した．やはり Schoen-Yau の結果とスピン同境理論を用いて，私は Lawson-Yau の定理のバンドル版を作った:

(viii) F を $8q+1$ 或は $8q+2$ 次元でゼロでない α 不変量をもつスピン多様体とし，E もスピンとする．このとき, $N_s(E) = 0,\ N(E) \leq N(V) + \dim\ F$.

最後に私は対称度の応用として次の位相学的な結果を示した:

(ix) Σ^n をスピン多様体の境界にならない n 次元異種球面とし, V をスピンとする．このとき, 二つ積多様体 $\Sigma^n \times V$ と $S^n \times V$ は微分同相にならない．