論文審査の結果の要旨

氏名　許　斌

提出された論文は大きく分けて二つの部分からなる．前半は閉多様体上の調和解析に関するものであり，後半は閉多様体上の幾何，特に調和写像と同境理論の変換群理論への応用に関するものである．

前半では，n 次元コンパクト リーマン多様体 M^n (以下扱う多様体は境界を持たないものとする) 上のラプラス・ベルトラミ作用素 Δ の区間 $[0,\lambda^2]$ における スペクトル射影作用素の積分核 $e(x,y,\lambda)$ の $x=y$ におけるの導関数の漸近挙動について新しい結果を証明し，それを用いて区間 $\left[\lambda^2,(\lambda+1)^2\right]$ におけるスペクトル射影 χ_λ の精密なソボレフノルム評価を見出した．前半の結果については $e(x,y,\lambda)$ の $x=y$ での漸近評価が 1960 年代に L. Hörmander により得られているが，本論文ではさらに踏み込んで $e(x,y,\lambda)$ の任意階の導関数の場合が証明されている．証明は $\cos\left(t\sqrt{\Delta}\right)$ の wave kernel の精密な解析によっている．これは重要な進展であり，実際このことを用いて，作用素 χ_λ の L^p ノルム評価に関する C.Sogge の定理をソボレフ空間の場合に次のように一般化した．

定理　$2\le r,\ \lambda\ge 1$ に対して，

$$\|\chi_\lambda f\|_{H_k^r(M)}\le C\lambda^{k+\epsilon(r)}\|f\|_{L^2(M)},$$

ただしここで $H_k^r(M)$ は k 階の L^r ソボレフ空間であり，$\epsilon(r)$ は論文中で定義されている指数である．

L^p ノルム評価と違って，ソボレフノルムの場合には評価すべき関数の導関数の L^p ノルム評価をする必要があるので，本論文で得られた $e(x,y,\lambda)$ の導関数の評価が本質的な役割を果たすことになる．さらに本論文では，この定理の評価式がシャープであることも球面上の場合に球面調和関数に関する解析を行って示している．

論文の後半は多様体の幾何に関するものである．コンパクト リーマン多様体 (M,g_M), (N,g_N) の間の調和写像の全体を $\mathcal{H}$ で表す. (N,g_N) の等長変

換とその単位元の連結成分をそれぞれ $I(N, g_N)$, $I^0(N, g_N)$ で表す. さらに (N, g_N) の断面曲率が非正とする. このとき、下記の3つのことが知られていた：

事実1　$\mathcal{H}$ は空集合ではない (J.Eells and J.H.Samson).

事実2　$h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ が互いにホモトープならば、すでに $\mathcal{H}$ の中でホモトープである (P.Hartman).

事実3　さらに両リーマン多様体が実解析的とする. $\mathcal{H}$ に $I^0(N, g_N)$ が左から自然に作用するが、この作用による同値類は連結成分による同値類に等しい. $I^0(N, g_N)$ の次元は $\pi_1(N)$ の中心のランクに等しい.

学位論文申請者は上記の事実とアルバーネゼ写像の基本的性質をもとにして、独創的なアイデアでテクニークを開発して、M が N 上のファイバーバンドルであるときの $I(N, g_N)$ の次元あるいはその構造についての、興味深い結果を得た. その主なものを以下に述べる：

定理　$\mathcal{D}iff^0(N)$ で N の微分同相写像のなす群の単位連結成分とする. G を $\mathcal{D}iff^0(N)$ のコンパクト部分群とする. G の次元は $\pi_1(N)$ の中心のランク以下であり、等しければ、G は連結トーラスで $I^0(N, g_N)$ に同形である.

M の上に効果的かつ滑らかに働く全てのコンパクトな Lie 群の次元の上限を $N(M)$ で表し, M の対称度と言う. コンパクトな半単純 Lie 群を考えれば, M の半単純対称度 $N_s(M)$ も定義できる.

定理　(i) 多様体 M^n の第一 Betti 数が 3 以上かつ次元 n が 5 以上のとき, $N(M) \leq \langle n-2 \rangle (\langle n \rangle := n(n+1)/2)$.
(ii) $H^1(M; \mathbf{R})$ の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ が存在して, それらのカップ積 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k$ が $H^k(M; \mathbf{R})$ で消えないとき, $N(M) \leq \langle n-k \rangle + k$, $N_s(M) \leq \langle n-k \rangle$.
(iii) (ii) の仮定の下で, もし $b_1 > k \geq 3$ かつ次元 n が $k+3$ 以上のとき, $N(M) \leq \langle n-k \rangle + k - 2$.
なお, (i)-(iii) で等式が成立する例も容易に作ることができる.

定理　以下 M を V 上の連結なファイバー F^m をもつコンパクトなファイバー・バンドルとする.
(iv) $N(M) \leq \langle m \rangle + N(V)$, $N_s(M) \leq N_s(S^m)$, $N(S^m \times V) = N(S^m) + N(V)$, $N_s(S^m \times V) = N_s(S^m)$.

(v) k を 1 或は 5 以上の整数とする．ファイバー F^{4k} を向きつけ可能で，ゼロでない符号数をもつとし，M も向きつけ可能とする．このとき，$N(M) \leq 4k(k+1)+N(V)$．さらに，V が向きつけ可能であれば，$N(\mathbf{C}P^{2k} \times V) = N(\mathbf{C}P^{2k}) + N(V) = 4k(k+1)+N(V)$．ここに $\mathbf{C}P^n$ が n 次元複素射影空間である．
(vi) ファイバー F^4 が S^4 或は $\mathbf{R}P^4$ と 2 を法とする同境でなければ, $N(M) \leq N(V)+8$, $N_s(M) \leq 8$. 特に, $N(\mathbf{C}P^2 \times V) = N(V)+8$, $N_s(\mathbf{C}P^2 \times V) = 8$.
(iv)-(vi) の中の等式は評価式が最良であることを主張し，等式そのものも興味深い．

定理　以下 M を V 上の連結なファイバー F^m をもつコンパクトなファイバー・バンドルとする．
(vii) F をゼロでない $\hat{A}$ 種数をもつスピン多様体とし，M もスピンとする．このとき，$N(M) \leq N(V)$, $N_s(M) = 0$．さらに，V がスピンであれば，等式 $N(V \times F) = N(V)$ が成り立つ．
(viii) F を $8q+1$ 或は $8q+2$ 次元でゼロでない α 不変量をもつスピン多様体とし，M もスピンとする．このとき, $N_s(M) = 0$, $N(M) \leq N(V) + \dim\, F$.
(ix) Σ^n をスピン多様体の境界にならない n 次元異種球面とし, V をスピンとする．このとき, 二つ積多様体 $\Sigma^n \times V$ と $S^n \times V$ は微分同相にならない．

本論文後半における学位論文申請者の開発したテクニークの主要な部分は、(M, g_M) から (N, g_N) への調和写像 h と準同形写像 $\rho : G \longrightarrow I(N, g_N)$ を構成して、$h(g(m)) = \rho(g)\, h(m)$ $(m \in M)$ となることを証明することにある。これをもとに次に $Ker(\rho)$ の h のファイバーへの作用の様子を分析することにより結果を証明した。

以上のように申請者は論文の前半で閉多様体上のスペクトル関数に関する深い解析をし，精密な新しい結果を得ており，また後半では独創的なアイデアにより対称度 $N(M)$, $N_s(M)$ に関する新しい結果を得ている．よって論文提出者 許斌 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．