論文内容の要旨

論文題目　Supersymmetrization and Deformation Quantization of Nambu-Hamilton systems

(南部－ハミルトン系の超対称化及び変形量子化)

氏名　榊原 正人

ハミルトン系は、物理現象の幾何学的代数的描写を与え得る基本的概念である。特に古典論と量子論の対応を見る上で、興味深い哲学的、数学的示唆を我々に与える。1973年に、南部陽一郎はリウビルの定理を指導原理として、ハミルトン系の拡張を提案した。この力学系は複数のハミルトニアンと、ポアッソン括弧の拡張である南部括弧により定義される。大きな特徴として、その時間発展において相空間の体積を保存するという性質を持つ。南部は、二つの保存量を持つオイラーのコマ(ナーム方程式と等価である。)が、この力学系で記述されることを示した。古典論としての性質はよく理解されていて、タクタジャンにより微分幾何学的に整備された。さらに、超流体における渦や弦理論におけるブレーンなどの広がりを持つ物体の作用が、南部括弧積により記述される、という発見があり、多くの研究者の興味を引いている。一方、その量子化は、さまざまな手法で試されているにもかかわらず、いずれの場合も本質的な問題を含み、現在でも完全には成功していない。もし量子化が可能ならば、広がりを持つ物体が量子化されることを意味し、このことは研究の大きな動機となっている。

この論文では、まず南部－ハミルトン系の古典論における物理的、数学的性質を要約した。特にシンプレクティック幾何の拡張という視点から、その性質をまとめ、リウビルの定理の拡張が成立することを示した。また南部括弧積と広がりを持つ物体との関連をまとめ、その作用の持つ体積保存対称性が、南部括弧積を用いて書けることを見た。また、南部－ハミルトン系の量子化について。今まで試みられてきた正準量子化、経路積分による量子化などの方法をまとめ、量子化が困難な理由やその問題点を整理した。

南部－ハミルトン系が作用原理を持つという事実により、この力学系はハミルトン系と見なすことができる。ただし、特異系となり拘束条件を解く必要がある。この事実を用いて、

$\mathbb{R}^n$ 上の標準的南部括弧積が、ディラック括弧積に相当すると予想されるポアッソン括弧積を用いて書けることを示した。さらにそのポアッソン括弧積をコンセビッチの結果を用いてモイヤル括弧積に置き換えると、標準的南部括弧積の変形量子化が得らる。この量子化された南部括弧積が、基本恒等式を満たすことを示した。ただし、物理量は補助変数に陰に依存することになる。また、通常のディラックの方法を用いても、この拘束条件を解析することができることを示した。実際にディラック括弧を静的ゲージ条件のもとで計算した。特に、拘束の構造が非可換ブレーンのそれと同等になることを見た。これらの結果を用いて、演算子形式の量子化についての考察をした。南部 – ハミルトン系のヒルベルト空間は、トーラス上の場の理論におけるフォック空間の部分空間となる。また演算子の満たすディラックの条件の拡張を提案した。さらに新しい行列正則化の方法も提案した。

ゴパクマー等による非可換ソリトンは、南部括弧との直接関係は持たないが、弦理論における高次元のソリトンに対応していることが知られており、間接的な関係が示唆される。また変形量子化と可積分系の関連という観点からも興味深い。非可換ソリトンはKP階層とよく似た性質を持っているが、可積分系との関係ははっきりしていなかった。そこでKP階層の解空間である佐藤グラスマン多様体と、非可換ソリトンの解空間が、ほとんど同一視できることを示した。さらに佐藤グラスマン多様体上の流れにより、非可換ソリトンも同様な流れを持つことを示し、その時間発展の方程式を得た。これはKP階層の新しい記述とも見なせる。また、その流れの意味を非可換ゲージ理論の立場から考察した。

これまで南部 – ハミルトン系はボーズ粒子を含む場合のみ考えられてきた。しかし、この力学系が有用であるならば、フェルミ粒子も含む場合も考察されるべきであろう。さらに超対称性を持つ広がりを持つ物体を考える上でも、応用が期待される。フェルミ粒子を加えるためには、南部括弧積を $\mathbb{Z}_2$ 次数付きのものに拡張しなければならない。南部括弧積は一般に三つの性質で特徴づけされているため、これらを $\mathbb{Z}_2$ 次数付きのものに拡張し、それをもって定義することは自然であろう。この論文ではこの三つの性質がどのように拡張されるべきかを考察し、それにより特徴付けされる超南部括弧積を定義した。これにより、一般の超多様体上での超南部 – ポアッソン代数を考えることができるようになった。南部括弧積は、その他の高次の括弧積をもつ代数 L_∞ 代数や、それと関連深いバタリン – フィルコフスキー代数との関連が長い間、示唆されていた。我々の定義した超南部括弧を用いると、その南部 – ハミルトン・ベクトル場の発散を考えることにより、自然にバタリン – フィルコフスキー代数の拡張が得られることを見た。実際に、発散が拡張された性質を導出し、超南部括弧積とコジュール及びアクマンが定義した高次の括弧積との関連について述べた。

我々の定義した超南部 – 括弧を用いると、フェルミ自由度を持つ南部 – ハミルトン系を考えることができる。まずその基本的性質を考察し、超南部 – ハミルトン系のいくつかの例をあげた。またボソンのみを含む場合と同様に、作用原理を持つことを見た。またこれらの作用原理を用いて、超南部 – ハミルトン系を特異的なハミルトン系と見なし、その拘束系の構造を解析し、ディラック括弧を求めた。