

論文審査の結果の要旨

氏名 加藤 豪

本論文の主題はスピン $1/2$ 1次元ハイゼンベルグ模型の解析的研究である。これは磁性体の量子論的模型として古くから詳しく研究されており、特にベータによるハミルトニアンに対角化(1931年)以来、厳密に解ける模型、あるいは量子可積分系の最も基本的、規範的な例として今日でも重要な位置を占めている。論文提出者の主な結果は二つあり、それぞれ論文の Part I と Part II に与えられている。

第一の結果は等方的ハイゼンベルグ模型(XXZ 模型)の分配関数の新たな導出法の開発である。一般に分配関数の計算は、無限個の固有状態についての足し上げ操作を伴うため可積分系においても容易ではない。この困難を克服する方法としては従来ストリング仮説による熱的ベータ法と量子転送行列法という二つの方法が知られていた。それによれば分配関数はある非線形積分方程式の解により特徴づけられる。この結果自体が厳密であることには多くの検証があり疑念の余地はない。しかしその導出には、ベータ方程式の根のパターンや量子転送行列のゼロ点分布などについて、数値的な検証に頼らざるを得ない仮定が介在している。これに対して論文提出者の提出した第三の方法は、状態和の定義とベータ方程式、エネルギー固有値の表式だけから出発して分配関数を特徴づける積分方程式を導くものである。用いる仮定は、システムサイズ無限大の極限でポワソン和のある項のみが0でない有限の寄与を与えることと、ある複素多重積分の積分路変更の際する不変性のみである。これらの仮定は数値的に検証されうるといったレベルの漠然とした性質ではなく、数学的な命題として定式化するものであり、部分的に証明も達成されている。このように完全に数学的に厳密な導出とのギャップが若干の明確な命題にまで追い詰められるような独創的なアプローチが開発されたことは意義深い。

第二の結果は異方的(XXZ)ハイゼンベルグ模型の基底状態における相関関数に関するものである。既知の結果は多重積分として与えられるものであったが、これを一重積分の多項式に簡約する系統的な処方箋を提出した。完全に一般の場合にこの処方箋で十分であるかは証明されていないが、4隣接サイトまでは実際に任意の相関関数の明示公式を与えることに成功している。

以下、章ごとにその内容を概観する。第1章では導入として、ハミルトニアンの固有値、ベータ方程式を与えて問題設定を行い、関連するこれまでの研究やその問題点等が議論され、Part I, II の主結果を総括し、本論文の動機やその結果の位置づけ等が述べられている。

第2章から第8章までが Part I をなす。第2章では下向きスピンの数 M が2の場合の例に沿って基本的なアイデアを説明している。その核心はベータ方程式の根の衝突を回避するためのメビウス反転、ポワソン和からの熱力学的極限での寄与の抽出、ベータ方程式へのパラメータの挿入による積分路の変更である。

第3章では第2章のアイデアを一般の M において実行している。これは11のステップからなる精緻な計算の集積である。結果として下向きスピン M 個のセクターの分配関数がパラメーター入りベータ方程式のヤコビアンを重みとするメビウス和として与えられる。

第4章から第6章では問題のヤコビアンがストリング仮説に基づいて形式的に計算したものと一

致することを指摘し、自由エネルギーの M ごとの展開係数について第 3 章と類似の結果を導き、そのグラフ展開による記述を与えている。

第 7 章では自由エネルギーの展開係数 u_M を拡張した関数 $u_M(x)$ を導入し、 M についての漸化式を導出している。これにより $u_M(x)$ の M についての母関数が目標の積分方程式の解となることが証明されている。技術的な補題は付録 A~P にまとめられている。第 8 章は Part I の要約である。

第 9 章から第 13 章までが Part II をなす。第 9, 10 章では臨界、非臨界的反強磁性領域のそれぞれにおいて相関関数の多重積分表示を簡約する一般的処方箋を説明している。基本的には被積分関数の対称性を利用して、複数の積分変数に依存する分母を順次消去していく操作である。

第 11, 12 章では最隣接相関関数についてその適用を例示し、次々近接相関関数の表式を与え、4 サイト相関の異方性パラメータ依存性をグラフにした。付録 Q,R には 4 サイトの場合の計算の詳細と任意の相関関数の明示公式が与えられている。第 13 章は Part II の要約である。

本論文の成果は 1 次元ハイゼンベルグ模型について独創的な解析的手法、新しい結果を提供するもので、学位論文として十分な内容を持っている。

なお、本論文 Part I の一部は和達三樹氏と、Part II の一部は高橋實、城石正弘、堺和光氏との共同研究に基づくものであるが、論文提出者の寄与が十分であると判断する。

以上のことから、博士（理学）の学位を授与できると認める。