論文内容の要旨

論文題目　Geometric Aspects of E-String Theory
(E弦理論の幾何学的諸相)

氏名　酒井 一博

本論文は、弦理論のソリトンのひとつであるE弦のなす場の理論について、その量子論的スペクトラムを幾何学的背景を利用して求める研究についてまとめたものである。

弦理論は自然界の全ての基本構成要素と相互作用を統一的に記述する理論の最有力候補としてこの20年間精力的に研究されている。素粒子理論の標準模型の基盤をなすゲージ理論を含み、かつ無矛盾な重力の量子化を与える点が弦理論の魅力であるが、一方でこの理論は完全な定式化が摂動論の範囲にとどまっている発展途上の理論である。しかしながら1990年代半ばの弦双対性の発見を契機に、近年弦理論の非摂動論的側面の研究が活発に行われている。このような流れの中で、弦理論は当初の予想をはるかに超えた、豊かな構造を内包することが明らかになってきた。本論文の主題であるE弦の存在は、そのような驚くべき発見のひとつである。

E弦は $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論において、インスタントンの大きさが零になる極限で発見された。インスタントンの大きさが零になる極限では、弦結合定数の大小によらずに摂動論的な記述が破綻する特異性が現れる。しかしながらこのような特異性は、必ずしも物理現象の特異性に直結するとは限らない。ゲージ理論で知られているように、理論の持つソリトンが軽くなって低エネルギースペクトラムに現れるという非摂動論的効果を考えることで、特異性を解消できる場合がしばしばある。$E_8 \times E_8$ ヘテロティック理論をK3多様体にコンパクト化した理論において1つのインスタントンがつぶれる設定にも、このような特異性解消が適用できる。しかしながらこの場合、ソリトンとして現れるのは通常のように点粒子ではなく、1次元の空間的広がりを持つ弦であることが明らかになった。この弦は世界面に $(0,4)$ 超対称性、E_8 カレント代数の対称性をもつ。よってこの弦は、それまで弦理論の構成要素として知られていたどの弦とも異なる未知の物体であり、E_8 非臨界弦、あるいはE弦と呼ばれるようになった。

ヘテロティック理論において発見されたE弦であるが、実はE弦のみをヘテロティック理論の他の全てのモードから切り離すことができる。このときE弦は、それ自身で閉じた6次元の $(0,1)$

超対称場の理論を形成する。このとき特に、E弦は重力からも分離できるのが特徴的である。従って、重力なしに定義できる弦の量子論を与えるという意味で、E弦には単なるヘテロティック弦理論のソリトンにとどまらない重要性がある。

しかしながら、E弦のなす場の理論はLorentz不変なラグランジアンによる記述を持たないことから、通常の場の理論に適用される方法では量子化できない。この理論の量子論的振舞いを調べるにあたっては、空間一次元分の周期的コンパクト化が有効である。すなわちE弦理論を$\mathbf{R}^5 \times S^1$にコンパクト化すると、伸びたE弦に加えてS^1に巻きつくE弦が現れるが、この後者のE弦の各Kalza–Kleinモードを粒子とみなすことで、5次元の点粒子の場の理論としてスペクトラムを調べることができる。その中でも重要なのはBogomolnyi–Prasad–Sommerfield(BPS)状態となるモードである。BPS状態は超対称性代数の短表現をなすため、量子効果による繰り込み補正を受けず、非摂動論的にも厳密な取り扱いが可能である。したがって巻きついたE弦のBPSスペクトラムを解明することは、具体的に実現可能な目標として、E弦の量子論の最も基本的な問題のひとつに位置づけられる。実際これまでこの方向でいくつもの研究がなされてきたが、部分的な結果にとどまっていた。本論文の主要な成果は、可能な全てのモジュライパラメータを取り入れた場合のBPSスペクトラムを完全に与え、この方向の研究を完成させたことである。

E弦は$\frac{1}{2}$K3曲面、あるいは有理楕円曲面とも概del Pezzo曲面とも呼ばれる4次元多様体の幾何と密接な関係をもつ。この対応関係は、K3にコンパクト化したヘテロティック理論と複素3次元Calabi–Yau多様体にコンパクト化したF理論との双対性から導き出せる。ヘテロティック理論におけるE弦の出現はF理論側でCalabi–Yau多様体の中の$\frac{1}{2}$K3の無限小収縮に対応する。この双対性を5次元理論へ次元還元すると、$\mathbf{R}^5 \times S^1$上のE弦理論の双対理論は、M理論を同じCalabi–Yau多様体にコンパクト化することで与えられる。このM理論による描像が具体的な解析の上ではもっとも威力を発揮する。今の場合、S^1に巻きついたE弦は$\frac{1}{2}$K3中の2次元面に巻きついたM2ブレインによって実現され、一方の伸びたE弦は$\frac{1}{2}$K3に巻きついたM5ブレインによって実現される。そしてE弦のBPS状態の分配関数は、前者の実現によって4次元$\mathcal{N}=2$有効ラグランジアンに現れるプレポテンシャルに関係づけられ、後者の実現によっては$\frac{1}{2}$K3上の$\mathcal{N}=4$位相的ゲージ理論の分配関数と関係づけられる。

E弦理論を周期的コンパクト化によってさらに4次元にまで落とすと、低エネルギーでは有効的に4次元$\mathcal{N}=2$ゲージ理論とみなすことができる。$\mathcal{N}=2$ゲージ理論の有効作用はプレポテンシャルと呼ばれる正則関数によって記述される。このプレポテンシャルは5次元のBPS状態を数え上げていることが知られており、5次元BPS状態の分配関数そのものと同一視できる。分配関数という性質上、プレポテンシャルは無限和の形をなすが、一方で$\mathcal{N}=2$ゲージ理論のプレポテンシャルは、有限次元の多項式方程式で表されるSeiberg–Witten曲線から生成できる。したがって、このSeiberg–Witten曲線を求めることにより、BPS分配関数の完全な決定が達成されるのである。

Seiberg–Witten曲線を決定するにあたっては、M5ブレインによるもう一方の実現が役に立つ。$\frac{1}{2}$K3$\times T^2$にn回巻きついたM5ブレインの分配関数は、$\frac{1}{2}$K3上の$\mathcal{N}=4$ $U(n)$位相的ゲージ理論の分配関数と同一視できる。この分配関数は、アフィンE_8対称性と保型性をもち、ギャップ条件を満たし、正則アノマリー方程式と呼ばれるnについての再帰方程式に従う。これらの条件は分配関数を一意的に決定するのに十分であり、nが比較的小さい場合については具体的な計算が可能である。本研究ではこの計算を実際に遂行し、その結果を再現するようなSeiberg–Witten曲線の具体形を求めた。

得られたSeiberg–Witten曲線は、アフィンE_8代数の指標と保型関数を用いて表されており、E弦の分配関数のもつアフィンE_8対称性、保型性、Wilson線パラメータに関する二重周期性を明示的に表す形に書かれている。(このことから本論文ではこのSeiberg–Witten曲線をしばしば$\widehat{E}_8$曲線と呼んでいる。) さらにこのSeiberg–Witten曲線は、それ自身が$\frac{1}{2}$K3の楕円ファイブレイショ

ン表示を与えている。$\frac{1}{2}$K3 の楕円ファイブレイションは E_8 の 240 個の根に対応した 240 個の正則切断を持つことが知られている。本研究ではこれらの正則切断の具体形を今回得た Seiberg–Witten 曲線に基づき計算した。その帰結として、E 弦理論の Wilson 線パラメータに対して予想されていた幾何学的解釈が実際に確かめられた。

また、E 弦理論の Seiberg–Witten 曲線は、知られている全ての 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 及び 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論の低エネルギー有効作用について統一的記述を与える。本論文では $\widehat{E}_8$ 曲線に対してモジュライパラメータについての極限操作を施すことにより、E_8 フレーバー対称性を持つ 5 次元及び 4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論の Seiberg–Witten 曲線を実際に再現した。より低いフレーバー対称性に対応した Seiberg–Witten 曲線はこれらの曲線から得られる。一方で、4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論の中でも、4 つの基本表現物質場をもつ理論、および 1 つの随伴表現物質場をもつ理論は共形対称性を持つという点で特別な理論であり、その反映としてこれらの理論の Seiberg–Witten 曲線には保型性が現れる。本論文では、$\widehat{E}_8$ 曲線のもつ保型性をそのまま移行させつつこれらの理論の Seiberg–Witten 曲線を再現するという新しい対応を与えた。特に 4 つの基本表現物質場をもつ理論の方には、電磁トライアリティと呼ばれる 4 次元理論の枠内では説明のつかない双対性が存在する。本論文ではこの理論を上記の対応に従い E 弦理論から再現することで、電磁トライアリティが E 弦理論の保型性の自然な帰結として導かれることを示した。