論文の内容の要旨

論文題目: Topics on Analysis for Certain Infinite Dimensional Diffusion Processes

(ある無限次元拡散過程に対する解析学の話題)

氏名: 河備 浩司 (KAWABI Hiroshi)

本論文は、無限次元空間に値をとる拡散過程に関する解析学のうち、関数不等式とその応用を中心に論じたものである。そのうち特に放物型の確率偏微分方程式（以下では SPDE と略記する）で記述された経路空間 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の拡散過程を中心に取り扱った。放物型 SPDE とは、反応拡散方程式に白色雑音によるランダムな揺動項をつけて得られるものである。例えば、ランダムな媒質中を漂う弦のランダムな運動がこの種の方程式で記述されるほか、統計力学的な観点からは強磁性体のスピンのランダムな時間発展を記述する方程式としても知られている。その他にも場の量子論、工学、経済学など様々な分野において現れるものである。本論文では以下の 2 種類の SPDE を取り扱い、それぞれの推移半群の関係を調べ、不変測度と Gibbs 測度の関係、半群の微分評価や放物型 Harnack 不等式を中心とする関数不等式やその応用について論じた。これは [7] と [8] に基づく。

$$dX_t(x) = \frac{1}{2}\{\Delta_x X_t(x) - \nabla U(X_t(x))\}dt + BX_t(x)dt + dW_t(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t>0, \tag{1}$$

$$dY_t(x) = \frac{1}{2}\{\Delta_x Y_t(x) - \nabla U(Y_t(x))\}dt + dW_t(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t>0, \tag{2}$$

ここで $U(z):\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ はポテンシャル関数、$B \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$、$\Delta_x = d^2/dx^2$、$\nabla = (\partial/\partial z_i)_{i=1}^d$、$W_t(x)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ 上の白色雑音とする。なお $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は Browinian filtration とする。また以下では、$b(z) := -\frac{1}{2}\nabla U(z) + Bz$ とも書く。U と B に以下の条件を課す。

(U1): $U \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ で球対称である。

(U2): 全ての $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\nabla^2 U(z) \geq -K_1$ となるような $K_1 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(U3): 全ての $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $|\nabla U(z)| \leq K_2(1+|z|^p)$ となるような $K_2 > 0$ と $p > 0$ が存在する。

(U4): $\lim_{|z|\to\infty} U(z) = \infty$.

(B): $B^* = -B$.

これらを満たす興味深い例として 2 次ポテンシャル $U(z) = a|z|^2$ や、2 重井戸型ポテンシャル $U(z) = a(|z|^4 - |z|^2)$ が挙げられる。また B の簡単な一例としては $d=2$ の場合では $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が挙げられる。この行列は回転行列 $e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ を生成する。ゆえに物理的には $\{Bz\}_{z\in\mathbb{R}^d}$ を磁場と解釈することができるので、SPDE (1) を外力項だけではなく磁場の影響も受ける SPDE と見ることができる。

SPDE (1)、(2) の解の数学的な研究は岩田 [6] によってなされている。[6] では $X_t(x)$ の $|x| \to \infty$ での増大度を制御するために、$C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ の適切な部分空間での議論がなされている。まず $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を $|x| \geq 1$ で $\chi(x) = |x|$ となる正値対称凸関数として固定し、Fréchet 空間

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\lambda>0} \left\{ X(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} |X(x)| e^{-\lambda\chi(x)} < \infty \right\}$$

を考える。また、任意に固定した $\bar{\lambda} > 0$ に対して Hilbert 空間 $E := L^2_{\bar{\lambda}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}, e^{-2\bar{\lambda}\chi(x)}dx)$ を導入する。以下では、これらの空間を問題の拡散過程 $\mathbb{M}$ の状態空間と解釈する。また $H := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ とも記す。

すると仮定 (U1)〜(U3)、(B)（より緩い仮定）の下で、任意の初期データ $w \in \mathcal{C}$ に対して SPDE (1)、(2) の解 $X_\cdot \in C([0,\infty), \mathcal{C})$ が存在し、pathwise uniqueness が成り立つことが知られている。以下では $\{P_w\}_{w\in\mathcal{C}}$、$\{P^{(0)}_w\}_{w\in\mathcal{C}}$ を、それぞれ X、Y から導入された $C([0,\infty), E)$ 上の確率法則とし、$\mathbb{M} := (X, P_w)$、$\mathbb{M}^{(0)} := (Y, P^{(0)}_w)$ と書く。また対応する推移半群をそれぞれ $\{P_t\}_{t\geq 0}$、$\{P^{(0)}_t\}_{t\geq 0}$ と書く。また岩田 [5] では仮定 (U4) の下では U-Gibbs 測度が存在し、拡散過程 $\mathbb{M}^{(0)}$ の可逆測度であることも示されている。

本論文ではまず、$\mathcal{C}$ 上の U-Gibbs 測度が非対称な拡散過程 $\mathbb{M}$ の不変測度の関係を拡散半群 $\{P^{(0)}_t\}$ と $\{P_t\}$ の関係を通して論じた。ただし本論文では U-Gibbs 測度として

$$\mu(A) := e^{2r\kappa} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \Omega(z)\Omega(z')p(2r,z,z')\mathbb{E}^{z,z'}_{-r,r}\Big[\exp\Big(-\int_{-r}^{r} U(w(x))dx\Big); A\Big] dzdz', \ A \in \mathcal{B}_r, \ r > 0 \quad (3)$$

で定義されたものを考えることにする。ここで $\mathcal{B}_r$ は $\mathcal{C}|_{[-r,r]}$ により生成される σ-field であり、$\kappa > 0$ は $L^2(\mathbb{R}^d, dz)$ 上の Schrödinger 作用素 $H := -\frac{1}{2}\Delta + U$ の最小固有値、Ω は対応する正規化された固有関数である。また $p(t,x,y) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}\right\}$ で、$\mathbb{E}^{z,z'}_{-r,r}[\cdot]$ は $w(-r) = z, w(r) = z'$ なる Browinan bridge の測度に関する平均である。Feynman-Kac の公式によりこの測度が $\mathcal{C}$ 上の確率測度であり、DLR 方程式を満たすことが容易に分かる。以下では U-Gibbs 測度 μ を E 上の確率測度とも解釈する。

ここで半群 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ を

$$Q_t F(w) := F\big((e^{tB}w)(\cdot)\big), \quad F \in C_b(E, \mathbb{R}), \ w \in E$$

で定義する。これに関して以下の結果を得た。以下では cylinder 関数全体を $\mathcal{F}\mathcal{C}^\infty_b$ と記す。

定理 1. (1) 任意の $F \in \mathcal{F}\mathcal{C}^\infty_b$ と $s, t \geq 0$ に対して以下が成り立つ。

$$P^{(0)}_t Q_s F(w) = Q_s P^{(0)}_t F(w), \quad w \in E.$$

(2) 任意の $F \in \mathcal{FC}_b^\infty$ と $t \geq 0$ に対して以下が成り立つ。

$$P_t F(w) = P_t^{(0)} Q_t F(w) = Q_t P_t^{(0)} F(w), \quad w \in E.$$

するとこの定理と Gibbs 測度 μ の $\{Q_t\}$-不変性と、Gibbs 測度 μ の $\{P_t^{(0)}\}$-可逆性を合わせることで以下の定理が容易に得られた。

<u>**定理 2.**</u> Gibbs 測度 μ は、拡散過程 $\mathbb{M}$ の不変測度である。すなわち任意の $F \in \mathcal{FC}_b^\infty$ と $t > 0$ に対して

$$\int_E P_t F(w)\mu(dw) = \int_E F(w)\mu(dw) \tag{4}$$

が成り立つ。

(4) が成り立つ $\mathcal{C}$ 上の確率測度全体を $\mathcal{S}(b)$ と書く。条件 (U2) の代わりに、ポテンシャル関数の凸性

(U5): 全ての $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\nabla^2 U(z) \geq K_1$ となるような $K_1 > 0$ が存在する。

を課すと以下の定理が得られた。

<u>**定理 3.**</u> $\mathcal{S}(b)$ は一意である。すなわち、拡散過程 $\mathbb{M}$ の不変測度は (3) で定義した Gibbs 測度に限られる。

本論文では次に U-Gibbs 測度 μ に対して対称な推移半群 $\{P_t^{(0)}\}$ の微分評価について論じた。そのために、拡散過程 $\mathbb{M}^{(0)}$ と Dirichlet 形式との対応関係について述べる。U-Gibbs 測度 μ に対して対称な双線型形式 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2}\int_E \|DF(w)\|_H^2 \mu(dw), \quad F \in \mathcal{FC}_b^\infty$$

で定義する。ただし D は H-Fréchet 微分である。$\mathcal{E}_1(F) := \mathcal{E}(F) + \|F\|_{L^2(E;\mu)}$ と置き、$\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を $\mathcal{FC}_b^\infty$ の $\mathcal{E}_1^{1/2}$-norm による完備化と定義する。すると舟木 [2] により $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $L^2(E;\mu)$ 上の Dirichlet 形式となり、対応する拡散半群が $L^2(E;\mu)$ 上の強連続縮小半群として $\mathbb{M}^{(0)}$ から定まる推移半群 $\{P_t^{(0)}\}$ と一致することが分かる。これより以下の結果を得た。

<u>**定理 4.**</u> $F \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ に対して以下の微分評価が全ての $t \in [0,\infty)$ と μ-*a.e.* $w \in E$ に対して成り立つ。

$$\|D(P_t^{(0)}F)(w)\|_H \leq e^{\frac{K_1 t}{2}} P_t^{(0)}\big(\|DF\|_H\big)(w).$$

$\mathbb{M}^{(0)}$ に対しての Γ_2 は形式的には $\Gamma_2 \geq -\frac{K_1}{2}\Gamma$ と評価されるので Bakry-Emery の Γ_2-method によりこの定理が成り立つと理解できるが、厳密な証明において注意すべきことがある。この種の議論では半群と生成作用素に関して不変な core の存在が大前提になっている。ところが一般に無限次元空間上の設定ではそのような core を見つけることが非常に困難である。($\mathcal{FC}_b^\infty$ は半群と生成作用素に関して不変ではない。) それに対して本論文では拡散半群 $\{P_t^{(0)}\}$ による作用を問題の拡散過程に関する平均であるとみなし、問題の拡散過程の stochastic flow に関する L^2-評価式

$$\|X_t^{w+h} - X_t^w\|_H \leq e^{\frac{K_1 t}{2}}\|h\|_H, \; w \in \mathcal{C}, h \in H \cap \mathcal{C}$$

を用いて定理を得ると言うものである。なおこの評価式は半線型の熱方程式のエネルギー評価では良く知られたものであるので、方程式で記述されたモデルにおいては Γ_2-method を用いる既存の方法より、計算の見通しが立ちやすいという利点を持つ。またこの方法により条件 (U5) の下での対数 Sobolev 不等式の別証明も行った。

本論文では次に U-Gibbs 測度 μ に対して非対称な推移半群 $\{P_t\}$（定理 2 により $\{P_t\}$ は $L^p(E;\mu)$, $p \geq 1$-上の強連続縮小半群とみなす事ができる）に対して同様な議論を行うことを目標にした。ただし、半群の非対称性により、generator に関する適切な定式化と基本性質について議論を行う必要が生じる。$\{P_t\}$ の $L^p(E;\mu)$, $p \geq 1$ における generator を $(L_p, \mathrm{Dom}(L_p))$ とする。$(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) := \bigcap_{p \geq 1} \mathrm{Dom}(L_p), \\ \mathcal{L}F := L_p F, \ F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}). \end{cases}$$

で定義する。この generator の確率論的解釈は以下の通りである。

命題 5. 関数 $F : E \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ の元であるための必要十分条件は $\Phi^{[F]} \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(E;\mu)$ なる関数 $\Phi^{[F]} : E \to \mathbb{R}$ と $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale $\{M_t^{[F]}\}_{t \geq 0}$ が存在して以下を満たすことである。

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad M_t^{[F]} = F(X_t) - F(X_0) - \int_0^t \Phi^{[F]}(X_s)ds, \quad P_\mu\text{-a.s.}, \\ &\text{(ii)} \quad \mathbb{E}^{P_\mu}\left[|M_t^{[F]}|^p\right] < \infty, \quad t \geq 0, \ 1 \leq p < \infty. \end{aligned}$$

ただし $P_\mu := \int_E P_w \mu(dw)$ である。また上記の $\Phi^{[F]}$ が $\mathcal{L}F$ となる。

この命題を用いることにより以下の定理を得た。

定理 6. (1) $\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$.
(2) 任意の $t \geq 0$ に対して、$P_t(\mathcal{D}(\mathcal{L})) \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ が成り立つ。これは $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ が半群 $\{P_t\}$ の作用について閉じていることを意味する。
(3) $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \bigcap_{p \geq 1} W^{1,p}(E;\mu) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ が成り立つ。ただし

$$W^{1,p}(E;\mu) := \left\{ F \in L^p(E;\mu) \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}) \mid DF \in L^p(E, H;\mu) \right\}$$

である。
(4) 任意の $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して、martingale $\{M_t^{[F]}\}_{t \geq 0}$ は確率積分表現

$$M_t^{[F]} = \int_0^t (DF(X_s), dW_s)_H, \quad t \geq 0$$

を持つ。
(5) 任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して $F_1F_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ であり、以下が成り立つ。

$$\mathcal{L}(F_1F_2) = F_1\mathcal{L}F_2 + F_2\mathcal{L}F_1 + (DF_1, DF_2)_H.$$

これは $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ が環をなしていることを意味する。

この定理の中で最も重要な主張は (3) である。これは対称な場合における「拡散半群の generator の domain は Dirichlet 形式の domain に含まれる」という基本的な性質が、回転効果を付けても不変である事を意味する。証明は定理 1 と、対称な推移半群 $\{P_t^{(0)}\}$ に対する Littlewood-Paley-Stein 不等式（これは定理 4 から得られる）を組み合わせることで行った。また (4) の証明には martingale 表現定理を用いるので、$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ が Brownian filtration であることが本質的に効いてくる。無限次元空間に値をとる非対称拡散過程に対しては、W. Stannat [12] の類似の研究があるが、本論文で扱っている回転項は対称な generator の摂動とみなすことができない。よってこの定理は [12] とは全く異なるものである。

定理 6 を用いることで、非対称な推移半群 $\{P_t\}$ に対しても対称な場合とほぼ同じ議論ができ、以下の微分評価を得ることが出来た。

定理 7. $F \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ に対して以下の微分評価が全ての $t \in [0,\infty)$ と μ-a.e. $w \in E$ に対して成り立つ。

$$\|D(P_t F)(w)\|_H \le e^{\frac{K_1 t}{2}} P_t\big(\|DF\|_H\big)(w).$$

次に本論文では上記の定理の応用として、半群 $\{P_t^{(0)}\}$ と $\{P_t\}$ に対する放物型 Harnack 不等式を得た。
定理 8. $F \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$ とする。この時、任意の $h \in H$、$\alpha > 1$、$t > 0$ で

$$\big|P_t F(w)\big|^\alpha \le P_t \big|F\big|^\alpha (w+h) \cdot \exp\left(\frac{\alpha \|h\|_H^2}{2(\alpha-1)} \cdot \frac{K_1}{1-e^{-K_1 t}}\right).$$

が全ての $w \in E$ に対して成り立つ。また $F \in L^\infty(E;\mu)$ の時は上記の不等式が μ-a.e. $w \in E$ で成り立つ。ただし $K_1 = 0$ の時は $\dfrac{K_1}{1-e^{-K_1 t}} := \dfrac{1}{t}$ とする。また上記と同じ主張が対称な推移半群 $\{P_t^{(0)}\}$ に対しても成立する。

最後に定理 8 の応用として、E 内の 2 つの Borel 集合 A, B 間の拡散過程 $\mathbb{M}$ の推移確率 $p_t(A,B)$ と $\mathbb{M}^{(0)}$ の推移確率 $p_t^{(0)}(A,B)$ の下からの評価式を論じた。それと共に、2 つの集合間の適切な H-距離 $d_H(A,B)$ の基本性質についても議論を行った。
定理 9. $\mu(A), \mu(B) > 0$ なる Borel 集合 $A, B \subset E$ の内のどちらかが H-open であるとする。
(1) $d_H(A,B) < \infty$ とする。任意の $\alpha > 2$ と $\varepsilon > 0$ に対して定数 $C(\alpha,\varepsilon,A,B) > 0$ が存在して、 以下の評価式が成り立つ。

$$p_t^{(0)}(A,B) \quad \ge \quad C(\alpha,\varepsilon,A,B) \cdot \exp\Big\{ -\frac{\alpha\big(d_H(A,B)+\varepsilon\big)^2}{2(\alpha-1)} \cdot \frac{K_1}{1-e^{-K_1 t}} \Big\}. \tag{5}$$

また以下の Varadhan 型短時間漸近公式が（$d_H(A,B) = \infty$ の場合も含めて）成り立つ。

$$\lim_{t\to 0} 2t \log p_t^{(0)}(A,B) = -d_H(A,B)^2. \tag{6}$$

(2) 非対称拡散過程 $\mathbb{M}$ に対しては、

$$\liminf_{t\to 0} 2t \log p_t(A,B) \ge -d_H(A,B)^2 \tag{7}$$

なる推移確率の下からの短時間漸近評価が成り立つ。

ちなみに対称な拡散過程に対しては、日野と Ramirez ([11],[3],[4]) が一般的な枠組みで Varadhan 型短時間漸近公式が成立することを示しているので (6) は彼らの結果に含まれるが、評価式 (5) は含まれない事に注意しておきたい。また非対称な拡散過程にたいしては、Ramirez [11] が Girsanov 変換で対称な拡散過程の評価に持ち込める設定では Varadhan 型短時間漸近公式を得ているが、先に述べた通り、本論文のように非対称性が回転効果によって生じている場合はこのような方法は使えないため、(7) は新しい結果であると言える。また $p_t(A,B)$ の上からの短時間漸近評価式に関してであるが、摂動とみなせないような非対称項が入った場合の Lyons-Zheng の martingale 分解公式の定式化から問題になり、まだ得られていない。SPDE (1) に対する大偏差原理の適用による証明の可能性も含めて、今後の課題である。

なお本論文の第 1 章では [1] に基づき、抽象 Wiener 空間上で楠岡 [10] の定式化した Dirichlet 形式に対応する Wiener 測度に対称な拡散過程に対して上記と同様な問題を論じた。この章では拡散係数に Cameron-Martin 空間方向のみの正則性条件を課したために、確率微分方程式によるアプローチを使うことが出来ないが、Malliavin 解析における Sobolev 空間論を用いることで関数解析的に議論を行った。また本論文の第 2 章では [9] に基づき、完備可分距離空間上の確率測度に対称な拡散過程に対する Littlewood-Paley-Stein 不等式と、その応用としての Sobolev ノルムの関係について論じた。先にも述べたように、これは定理 6 の証明で重要な役割を果たすことに注意しておきたい。

参考文献

[1] S. Aida and H. Kawabi: *Short time asymptotics of a certain infinite dimensional diffusion process*, in "Stochastic Analysis and Related Topics VII : Proceedings of 7-th Silvri Workshop" (L. Decreusefond, B. Øksendal and A. S. Üstünel eds.), Progress in Probability **48**, Birkhäuser (2001), pp. 77-124.

[2] T. Funaki: *The reversible measure of multi-dimensional Ginzburg-Landau continuum model*, Osaka J. Math.**28** (1991), pp. 463-494.

[3] M. Hino: *On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces*, Potential Analysis **16** (2002), pp. 249-264.

[4] M. Hino and J. A. Ramirez: *Small time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups*, Annals of Probab. **31** (2003), pp. 1254-1295.

[5] K. Iwata: *Reversible measures of a $P(\phi)_1$-time evolution*, in "Prob. Meth. in Math. Phys. : Proceedings of Taniguchi symposium" (K. Itô and N. Ikeda eds.), Kinokuniya, (1985), pp. 195-209.

[6] K. Iwata: *An infinite dimensional stochastic differential equation with state space $C(\mathbb{R})$*, Probab. Theory Relat. Fields **74** (1987), pp. 141-159.

[7] H. Kawabi: *The parabolic Harnack inequality for the time dependent Ginzburg-Landau type SPDE and its application*, preprint series UTMS 2002-27, To appear in Potential Analysis.

[8] H. Kawabi: *Functional inequalities and an application for parabolic stochastic partial differential equations containing rotation*, preprint, 2004.

[9] H. Kawabi and T. Miyokawa: *Notes on the Littlewood-Paley-Stein inequality for certain infinite dimensional diffusion processes*, preprint series UTMS 2003-43, Submitted to J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

[10] S. Kusuoka: *Dirichlet forms and diffusion processes on Banach space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA **29** (1982), pp. 79-95.

[11] J. A. Ramirez: *Short-time asymptotics in Dirichlet spaces*, Comm. Pure Appl. Math **54** (2001), pp. 259-293.

[12] W. Stannat: *(Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1: Existence, uniqueness and associated Markov processes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **28** (1999), pp 99-140.