論文審査の結果の要旨

氏名　河備 浩司

本論文は、無限次元空間上のある拡散作用素の解析的性質を論じたものである。以下のような確率微分方程式を考える。

$$dX_t(x) = \frac{1}{2}\{\Delta_x X_t(x) - \nabla U(X_t(x))\}dt + BX_t(x)dt + dW_t(x),$$

$x \in \mathbf{R}, t > 0$. ここで $B : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ は反対称な線形写像、$W_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, はホワイトノイズを値にとる Wiener 過程、$U \in C^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ は球対称な関数で
(1)$K_1 \in \mathbf{R}$ が存在して、$\nabla^2 U(z) \geq -K_1$, $z \in \mathbf{R}^d$
(2) $K_2 \in \mathbf{R}$, $p \geq 1$ が存在して、$|\nabla U(z)| \leq K_2(1+|z|^p)$, $z \in \mathbf{R}^d$
の 2 条件を満たすものとする。

この確率微分方程式は Fréchet 空間

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\lambda > 0}\{X(x) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d);\ \sup_{x\in\mathbf{R}} |X(x)| \exp(-\lambda|x|) < \infty\}$$

の中に一意な解をもつことが示される。この確率微分方程式は $L^2(\mathbf{R}^d, dz)$ 上の Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}\Delta + U$ に対する（非）対称な stochastic quantization の方程式と見なせ、この Schrödinger 作用素に付随する distorted Brownian motion の $\mathcal{C}$ 上に定める分布を μ とおけば、μ が不変測度になることが示せる。P_t を この確率微分方程式に付随した $H = L^2(\mathcal{C}, d\mu)$ 上の推移半群、$P_t^{(0)}$ を $B = 0$ の時の確率微分方程式に付随した H 上の推移半群とする。論文では先ず以下の定理を示した。

定理　$t \in [0,\infty)$ 及び $F \in \mathcal{F}C_b^\infty$ に対し

$$|D(P_t^{(0)}F)(w)|_H \leq \exp(K_1 t/2) P_t^{(0)}(|DF|_H)(w) \qquad \mu - a.s.w.$$

論文では、この不等式を基に $P_t^{(0)}$ に対する Littlewood-Paley-Stein 型の不等式を導いている。

拡散半群 $\{P_t\}$ は $L^p(\mathcal{C}; d\mu)$, $p \in [1,\infty)$ 上の強連続縮小半群とみなすことができるが、その生成作用素を L_p とし、$(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ を

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \bigcap_{p\in[1,\infty)} \mathrm{Dom}(L_p), \qquad \mathcal{L}F = L_p F, \quad F \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

で定義する。この時、次の事実を示した。

定理　関数 $F:\mathcal{C}\to\mathbf{R}$ が $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ の元であるための必要十分条件は $\Phi^{[F]}\in\bigcap_{p\in[1,\infty)}L^p(\mathcal{C};d\mu)$ なる関数 $\Phi^{[F]}:E\to\mathbf{R}$ と $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale $\{M_t^{[F]}\}_{t\geq 0}$ が存在して以下を満たすことである。

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad M_t^{[F]}=F(X_t)-F(X_0)-\textstyle\int_0^t\Phi^{[F]}(X_s)ds,\\&\text{(ii)}\quad E^{P_\mu}[|M_t^{[F]}|^p]<\infty,\qquad t\geq 0,\quad p\in[1,\infty)\end{aligned}$$

さらに $\Phi^{[F]}$ は $\mathcal{L}F$ と一致する。

さらに、この定理を用いて以下の定理を得ている。

定理　(1) $\mathcal{FC}_b^\infty\subset\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

(2) 任意の $t\geq 0$ に対して、$P_t(\mathcal{D}(\mathcal{L}))\subset\mathcal{D}(\mathcal{L})$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{D}(\mathcal{L})\subset\bigcap_{p\in[1,\infty)}W^{1,p}(\mathcal{C};\mu)$ が成り立つ。ただし

$$W^{1,p}(\mathcal{C};\mu)=\{F\in L^p(\mathcal{C};d\mu);\ DF\in L^p(\mathcal{C},H;\mu)\}.$$

(4) 任意の $F\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して、martingale $\{M_t^{[F]}\}_{t\geq 0}$ は確率積分表現

$$M_t^{[F]}=\int_0^t(DF(X_s),dW_s)_H,\qquad t\geq 0$$

を持つ。

(5) 任意の $F_1,F_2\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して $F_1F_2\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ であり、以下が成り立つ。

$$\mathcal{L}(F_1F_2)=F_1\mathcal{L}F_2+F_2\mathcal{L}F_1+(DF_1,DF_2)_H.$$

この定理を基に次のような Harnack 型の不等式を得ている。

定理　$F\in\mathcal{FC}_b^\infty$ とする。この時、任意の $h\in H$, $\alpha>1$, $t>0$ に対して

$$|P_tF(w)|^\alpha\leq P_t|F|^\alpha(w+h)\cdot\exp\left(\frac{\alpha\|h\|_H^2}{2(\alpha-1)}\cdot\frac{K_1}{1-e^{-K_1t}}\right)\quad\mu-a.s.w$$

が成り立つ。

最後にこれらの定理の応用として、Varadhan 型の短時間における漸近公式について論じている。

このように本論文では無限次元空間上の拡散作用素に対する実解析的な研究の新しい方向性を打ち出しており、高く評価できるものである。

よって、論文提出者　河備 浩司　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。