論文の内容の要旨

論文題目　Taut foliations of torus knot complements
(トーラス結び目補空間の taut 葉層構造について)

氏　名　　中江　康晴

本論文において, 筆者はトーラス結び目補空間における taut 葉層構造について研究した. 3 次元多様体の研究において, 余次元 1 葉層構造を用いる手法は多くの研究者により行われ, 様々な成果をあげてきている. 特に, 3 次元多様体上にどのような葉層構造が存在するかがその多様体の位相的性質をよく表していることを, いままでの研究の成果が示している. その中で重要な役割を果たすのが「Reeb 葉層」である. Reeb 葉層とはソリッドトーラス上の葉層構造で, そのソリッドトーラスの境界を唯一のコンパクトな葉とし, 内部にある葉は全て二次元平面 $\mathbb{R}^2$ に同相である. その内部の非コンパクトな葉は, ソリッドトーラスの中心に頂点を持ち, コンパクトな葉に向かって広がって巻き付いていく放物面に似た曲面の形をしている. Novikov [2] は, 3 次元球面 S^3 上の葉層構造は必ずこの Reeb 葉層を含むことを証明した. しかしながら, 3 次元多様体の位相的性質の研究においては「Reeb 葉層の非存在」が重要である. Novikov はまた, 二次元球面と円周の積空間 $S^2 \times S^1$ と同相ではない 3 次元多様体に Reeb 葉層を含まない余次元 1 葉層構造が存在するとき, その多様体は, (1) 基本群が無限群, (2) 二次ホモトピー群が自明, そして (3) 全ての葉は π_1 単射的であることを証明した. ここで余次元 1 葉層構造の葉が π_1 単射的であるとは, 葉から多様体への包含写像が誘導する基本群の準同型が単射になることを言う. Rosenberg [5] は, ある 3 次元多様体に Reeb 葉層を含まない葉層構造が存在すれば, その多様体は既約であることを証明した. ここで 3 次元多様体が既約であるとは, 任意に埋め込まれた二次元球面は必ず埋め込まれた三次元球体の境界になっているときを言う. さらにこれら Novikov と Rosenberg の結果に Palmeira [3] の定理を用いると, Reeb 葉層を含まない葉層構造が存在するこのような 3 次元多様体の普遍被覆空間は, 三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に同相であることが示される. 基本群が無限群であることはその多様体がレンズ空間ではないことを導き, 二次ホモトピー群が自明であることと多様体の既約性は普遍被覆

空間が可縮であることを導く．このように，Reeb 葉層構造の非存在が 3 次元多様体の位相的性質を研究する上で重要な意味を持っている．

この論文の主たる対象である taut 葉層構造とは，3 次元多様体上の余次元 1 葉層構造であって，全ての葉に対しその葉に横断的に交わる円周で他の葉にも横断的に交わるものが存在するときを言う．Reeb 葉層はこのような横断的に交わる円周を持たない．すなわち taut 葉層構造は Reeb 葉層を含まないので，ある 3 次元多様体に taut 葉層構造が存在すれば，Reeb 葉層を含まない葉層構造と同様の位相的性質がその多様体にあることがわかる．

この taut 葉層構造の存在に関して，Roberts [4] は以下の定理を証明した．

定理 (Roberts)　オイラー数が負の一つ穴あき曲面をファイバーとする円周上の曲面束で，向きづけ可能なコンパクト 3 次元多様体を M とする．このときある区間 $(-a,b) \subset \mathbb{R}$, $a,b>0$ が存在して，この区間の任意の有理数に対してこれを boundary slope として持つ taut 葉層構造 $\mathcal{F}$ が M に存在する．

この M の境界 ∂M は 2 次元トーラス T^2 であり，この $\mathcal{F}$ の葉の ∂M への制限は T^2 上の平行な単純閉曲線の族になる．この単純閉曲線が代表する T^2 の 1 次元ホモロジー群 $H_1(T^2)$ の元を $\mathcal{F}$ の boundary slope と呼ぶ．$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ の基底を定めることにより，この boundary slope は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の元と対応づけられる．この葉の境界としての単純閉曲線による boundary slope ρ に沿って Dehn filling をすることで，閉 3 次元多様体 $\widehat{M}(\rho)$ が得られる．このとき，$\mathcal{F}$ は自然に $\widehat{M}(\rho)$ 上の taut 葉層構造 $\widehat{\mathcal{F}}$ に拡張される．よって，この区間 $(-a,b)$ の範囲にある boundary slope による Dehn filling で得られた閉 3 次元多様体すべては前記のような位相的性質を持つことがわかる．

三次元球面 S^3 に標準的に埋め込まれたソリッドトーラス T に対し，その境界 ∂T 上の単純閉曲線をトーラス結び目と呼ぶ．トーラス結び目 K の補空間 $\overline{S^3 \setminus N(K)}$ は円周上の曲面束であることが知られている．筆者はこのトーラス結び目補空間に対して Roberts の定理と同様の研究を行い，本論文において以下を得た．

主定理 (定理 3.1)　S^3 に埋め込まれた任意のトーラス結び目 K に対して，区間 $(-\infty,1)$ のどの有理数 ρ に対しても boundary slope として ρ をもつ taut 葉層構造 $\mathcal{F}$ がその補空間に存在する．

この定理により，任意のトーラス結び目に沿った Dehn 手術のうち $(-\infty,1)$ の範囲の slope により得られる閉 3 次元多様体 M には taut 葉層構造が存在すること，すなわち $\pi_1(M)$ は無限群であり，M は既約で普遍被覆空間が $\mathbb{R}^3$ と同相であることがわかる．主定理は以下のように証明される．まず一般のトーラス結び目に対し，その補空間の曲面束を明示的に構成する．このファイバー曲面を利用して分岐曲面 B を構成し，B の各分岐に重みをパラメータ x を付けて与えることでラミネーション λ_x を構成する．この λ_x の補空間を埋めることで M のパラメータ付き taut 葉層構造 $\mathcal{F}_x$ を得て，これが定理の結論を満たすことを証明した．

主定理の証明における曲面束の構成を応用することで, 本論文においてさらに以下の結果を得た.

定理 (系 4.9)　K を S^3 に埋め込まれたファイバー結び目とする. $\hat{K}$ を $\partial N(K)$ 上の単純閉曲線, すなわち K のケーブル結び目とする. このとき, $\hat{K}$ はファイバー結び目になり, さらに区間 $(-\infty, 1)$ のどの有理数 ρ に対しても boundary slope として ρ をもつ taut 葉層構造 $\mathcal{F}$ が $\hat{K}$ の補空間に存在する.

この定理の K をトーラス結び目とすると, $\hat{K}$ は iterated トーラス結び目になる. この操作を繰り返すことで iterated トーラス結び目の列 $\{K_i\}$ が得られるが, この $\{K_i\}$ に対して以下を得た.

定理 (定理 4.1)　各 iterated トーラス結び目 K_i はファイバー結び目になり, さらに区間 $(-\infty, 1)$ のどの有理数 ρ に対しても boundary slope として ρ をもつ taut 葉層構造 $\mathcal{F}$ が各 K_i の補空間に存在する.

Lickorish の定理 [1] により, 任意の閉 3 次元多様体は S^3 に埋め込まれた絡み目に沿った Dehn 手術によって得られる閉 3 次元多様体と同相である. よって結び目だけではなく絡み目に沿った Dehn 手術の研究も重要であるが, Roberts の定理はこのままでは絡み目には用いることが出来ない. 本論文において, Roberts の定理を以下のように絡み目に対して部分的に拡張した.

定理 (定理 5.1)　境界成分が二つで種数が 2 以上の曲面をファイバーとする円周上の曲面束で, 向きづけ可能なコンパクト 3 次元多様体を M とする. 曲面束のモノドロミーがある条件を満たすとき, 区間 $(-a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$, $a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2$ が存在して, $\rho_1 \in (-a_1, b_1)$, $\rho_2 \in (-a_2, b_2)$ なる有理数 ρ_1, ρ_2 に対して, 任意に選んだ ρ_1 もしくは ρ_2 を各境界成分の boundary slope として持つ taut 葉層構造 $\mathcal{F}$ が M に存在する.

この定理において, 曲面束のモノドロミーに条件がついてるが (6, 4) 型トーラス絡み目に対しては, 定理の区間 $(-a_i, b_i)$ として両方の境界成分に対して $(-\infty, 1)$ が取れることを例 5.7 において示しており, この定理の条件を満たすような曲面束が存在していることも証明した.

References

[1] W.B.R.Lickorish, *A finite set of generators for the homotopy group of a 2-maniflod*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60**(1964), 769-778. '*Corrigendum*',Proc. Cambridge Philos. Soc. **62**(1966),679-781.
[2] S.Novikov, *Topology of foliations*, Trans. Moscow Math. Soc. **14**(1965), 248-278.
[3] C.F.B.Palmeira, *Open manifolds foliated by planes*, Annals of Math. **107**(1978), 109-131.
[4] R.Roberts, *Taut Foliations in punctured surface bundles, I*, London Math. Soc. **82**(3) (2001), 747-768.
[5] H.Rosenberg, *Foliation by planes*, Topology. **7** (1968), 131-138.