論文の内容の要旨

論文題目 Beukers' integral and the non-quadraticity measure for the values of logarithm at rational points

$$\left(\begin{array}{c}\text{Beukers 積分と対数関数の}\\ \text{有理点における値の非 2 次無理数度}\end{array}\right)$$

氏名　　佐藤 晋

論文の目的：対数関数の有理点における値について, その数の非 2 次無理数度のよい不等式評価を与える.

主定理：$\zeta > 1$ を有理数とする. また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathfrak{D}_n I_n| < 0$ と仮定する. このとき $\log\zeta$ に関して非 2 次無理数度は次の数を超えない.

$$1 + \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathfrak{D}_n a_n|}{-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathfrak{D}_n I_n|}.$$

ただし I_n はBeukers型の積分列であって, 以下のように $-\frac{1}{2}\log^2\zeta + \pi i \log\zeta$, $\pi i - \log\zeta$, 1 の $\mathbb{Q}$ 係数線形結合で表せるものである.

$$I_n = a_n \left(-\frac{1}{2}\log^2\zeta + \pi i \log\zeta\right) + b_n(\pi i - \log\zeta) + c_n$$

a_n は上に出ているように $-\frac{1}{2}\log^2\zeta + \pi i\log\zeta$ の係数であり, $\mathfrak{D}_n$ は a_n, b_n, c_n の分母を同時に払うような数である. ここで**非 2 次無理数度**を説明しよう. 固定された 3 次以上の無理数に対して, その数の 2 次無理数あるいは有理数での絶対値近似を考える. このとき近似する側の数の高さを基準にしてある程度以上はいい近似が得られないという限界が存在する. その限界のことを非 2 次無理数度と呼ぶ。

研究史：対数関数の有理点における値の非 2 次無理数度に関する研究を簡単にみる. H. Cohen [2] は線形再帰式を用いて, $\log 2$ が非 2 次無理数度 287.819 をもつことを示した. 後に E. Reyssat [3] は対数関数の Padé 近似を用いて, 同じく $\log 2$ が非 2 次無理数度 105 をもつことを証明した. その後に M. Hata [4] は Beukers 積分を用いる新手法で $\log 2$ の非 2 次無理数度を 25.0463 まで改良し, さらに Hata はより一般に k が 1 以上の整数に対する $\log\frac{k+1}{k}$ の結果も与えている. ここで Beukers 積分とは, Beukers [1] が $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性を証明するときに用いた多重積分のことである.

より広い範囲の有理数 ζ に対して $\log\zeta$ の非 2 次無理数度を改良しようとするのは自然な問題である. 我々の研究の目的は Hata の用いた Beukers 積分をさらに一般化したものに対して基本的な結果を得ようとするものである.

証明の手法と章構成：

第 1 章. 最初にこの論文で変形 Beukers 積分という積分を次のように導入する.

$$I_n = \lim_{\substack{z\to 1\\ \Im z>0}} \iint_{R_\zeta} \frac{P_n(x)Q_n(y)}{1-xyz}\,dx\,dy.$$

ここに P_n, Q_n は負べきも含めたある整数係数の多項式であり, R_ζ は $R_\zeta = (1,\zeta)\times(\zeta^{-1},1)$ なる矩形領域である. 右辺の極限が存在することをこの章で保証する. また I_n を複素重積分に書き換えておき, のちの漸近的評価に備える.

第 2 章. 第 1 章で導入した I_n は次のような別の表現を持つ.

$$I_n = a_n\left(-\frac{1}{2}\log^2\zeta + \pi i\log\zeta\right) + b_n(\pi i - \log\zeta) + c_n$$

ここに a_n, b_n, c_n はある有理数である. そこでこの章で, $\mathfrak{D}_n a_n, \mathfrak{D}_n b_n, \mathfrak{D}_n c_n$ がすべて整数となるような共通分母 $\mathfrak{D}_n$ を計算する.

第 3 章. 前章の I_n の表示より

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_n a_n \log\zeta + \mathfrak{D}_n b_n = \frac{\mathfrak{D}_n}{\pi}\Im I_n, \\ \mathfrak{D}_n a_n \log^2\zeta + 2\mathfrak{D}_n c_n = 2\mathfrak{D}_n \Re I_n + \frac{2\mathfrak{D}_n\log\zeta}{\pi}\Im I_n, \end{cases}$$

なる $\log\zeta$ と $\log^2\zeta$ の同時有理近似が得られる. ここから $\log\zeta$ の非 2 次無理数度の評価を行う. その際に $\log\zeta$ と $\log^2\zeta$ の係数である $\mathfrak{D}_n a_n$, また剰余項に関する I_n の漸近挙動を計算する必要がある.

$\mathfrak{D}_n$ の評価は第 2 章で既に議論されており, この章では a_n と I_n に関して解析的な挙動を調べる. このとき 2 次元の saddle point method を用いる. これは昔からよく知られる 1 次元の複素積分の漸近挙動を調べる鞍点法を、高次元にも適用できるようにしたものである.

第 4 章. 以上の結果を踏まえて、前掲の主定理を得る.

参考文献

[1] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Bull. London math. Soc.11 (1979), 268-272.

[2] H. Cohen, *Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires*, Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, (1980), 47.

[3] E. Reyssat, *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels*, Progr. Math., vol. 31, Birkhäuser, (1983), 235-245.

[4] M. Hata, $\mathbb{C}^2$*-saddle method and Beukers' integral*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol 352, No.10 (2000), 4557-4583.