## 論文審査の結果の要旨

氏 名 佐 藤 晋

# 論文題目 Beukers' integral and the non-quadraticity measure for the values of logarithm at rational points

( 和訳：Beukers 積分と対数関数の有理点における値の非２次無理数度 )

先ず、この論文の主定理は以下の通りである.

最初にこの論文で変形 Beukers 積分という積分を次のように導入する.

$$I_n = \lim_{\substack{z\to 1\\ \Im z>0}} \iint_{R_\zeta} \frac{P_n(x)Q_n(y)}{1-xyz}\,dx\,dy.$$

ここに $P_n, Q_n$ は負べきも含めたある整数係数の多項式であり, $R_\zeta$ は $R_\zeta = (1,\zeta)\times(\zeta^{-1},1)$ なる矩形領域である.

**主定理** 有理数 $\zeta > 1$ が与えられているとする. また $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log|\mathfrak{D}_n I_n| < 0$ と仮定する. このとき $\log\zeta$ に関して非２次無理数度は次の数を超えない.

$$1 + \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\mathfrak{D}_n a_n|}{-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\mathfrak{D}_n I_n|}.$$

ただし $I_n$ は Beukers 型の積分列であって, 次のように $-\frac{1}{2}\log^2\zeta+\pi i\log\zeta, \pi i-\log\zeta, 1$ の有理数係数線形結合で表せるものである.

$$I_n = a_n\left(-\frac{1}{2}\log^2\zeta + \pi i\log\zeta\right) + b_n(\pi i - \log\zeta) + c_n$$

$a_n$ は上に出ているように $-\frac{1}{2}\log^2\zeta+\pi i\log\zeta$ の係数であり, $\mathfrak{D}_n$ は $a_n, b_n, c_n$ の分母を同時に払うような数である.

ここで言う「非２次無理数度」の定義を思い起こそう. ある与えられた, ３次以上の無理数に対して, その数の２次無理数あるいは有理数での絶対値近似を考える. このとき近似する側の数の高さを基準にしてある程度以上はいい近似が得られないという限界が存在する. その限界のことを非２次無理数度と呼ぶ。

この論文に直接に先行する, 対数関数の有理点における値の非２次無理数度に関する研究を簡単にみる. H. Cohen は線形再帰式を用いて, log 2

が非2次無理数度 287.819 をもつことを示した. 後に E. Reyssat は対数関数の Padé 近似を用いて, 同じく $\log 2$ が非2次無理数度 105 をもつことを証明した. その後に M. Hata [2] は Beukers 積分を用いる新手法で $\log 2$ の非2次無理数度を 25.0463 まで改良し, さらに Hata はより一般に $k$ が 1 以上の整数に対する $\log \frac{k+1}{k}$ の結果も与えている. ここで Beukers 積分とは, Beukers [1] が $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性を証明するときに用いた多重積分のことである.

より広い範囲の有理数 $\zeta$ に対して $\log \zeta$ の非2次無理数度を改良しようとするのは自然な問題である. この研究の目的は Hata の用いた Beukers 積分をさらに一般化したものに対して基本的な結果を得ようとするものである.

この論文における新しい着想は、有理点における対数値の非2次無理数度を求める、あるいは改良するために、Beuker 型の2重積分

$$\iint_{R_\zeta} \frac{P(x)Q(y)}{1-xyz}\,dx\,dy.$$

において、多項式 $P$ と有理関数 $Q$ に5つのパラメータ $A, B, C, D, E$ を持つ新しいモデルを導入した点にあり、その解析的および数論的性質を調べ上げ、M. Hata によって始められた"**C**-saddle method"が適用できることを示している. この論文で得られた結果は、例えば 1, $\log 2, \zeta(2)$ の有理数体上の一次独立性のような未解決問題に対しても応用できる可能性を示唆している.

多重対数関数や超幾何級数などの特殊関数の値に関する研究は、Apery による $\zeta(3)$ の無理性の証明や Chudnovsky 兄弟による先駆的な研究以降、特にここ十数年にわたって、多くの優れた研究者によって精力的に続けられており、新しい結果を出すことが極めて難しくなってきている.

このような状況をみるとき、これまでに比してより一般的なモデル (おそらく2次元の Beuker 積分の文脈では最も一般的なもの) を考察した佐藤氏の結果は、この方面の研究の将来のために有意義な指標足りうる.

以上の理由より、論文提出者　佐藤晋　は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.

## 参考文献

[1] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Bull. London math. Soc.11 (1979), 268-272.

[2] M. Hata, $\mathbb{C}^2$*-saddle method and Beukers' integral*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol 352, No.10 (2000), 4557-4583.