# 論文の内容の要旨

論文題目: The Automorphism Group of the Vertex Operator Algebra $V_L^+$ and its Applicaitons

(頂点作用素代数 $V_L^+$ の自己同型群とその応用について)

氏名 島倉裕樹

本論文では，正定値偶格子 $L$ に付随する頂点作用素代数 $V_L$ の格子の自己同型 $-1$ の持ち上げによる固定点として得られる頂点作用素代数 $V_L^+$ の全自己同型群の決定を行い，そのムーンシャイン加群への応用を与えた.

頂点作用素代数の研究において，全自己同型群の決定は非常に大切な問題である. 例えば，ムーンシャイン加群の全自己同型群がモンスター単純群であり，そこから有限群論との密接な関係や保形関数論との不思議な繋がりがあることが知られている. しかしながら，一般に頂点作用素代数の全自己同型群を決定することは難しく，いくつかの例を除いて決定されていない.

頂点作用素代数 $V$ とその自己同型群 $G$ に対して，固定部分空間 $V^G$ もまた頂点作用素代数となる. 一般に $V$ に対して成立する性質が $V^G$ に対して成立するとは限らない. それゆえ $V^G$ の研究には困難が伴う.

頂点作用素代数の中で良く知られている例として正定値偶格子 $L$ に付随して得られる格子頂点作用素代数 $V_L$ がある. $L$ の自己同型を $V_L$ の自己同型に持ち上げることが出来るのは良く知られている. 任意の格子は $-1$ 倍する自己同型を持つので，その持ち上げとして得られる位数 2 の自己同型による $V_L$ の固定点として頂点作用素代数 $V_L^+$ が得られる. 最近，多くの研究者によって $V_L^+$ の既約加群の分類やフュージョン則の決定などが行われた. 本論文ではこれら $V_L^+$ の性質を用いていくつかの例外を除いて全自己同型群の生成元を与え，おおまかな群構造を与えた. 具体例として $L$ が階数 1 の偶格子，階数が 24 以上の偶ユニモジュラ格子，既約ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍して得られる格子または階数 16 の Barnes-Wall 格子の場合に $V_L^+$ の全自己同型群をこの方法を用いて決定した. 特に，いままで個別に計算されていた例に対して本論文で統一的な計算方法を与えたことになる.

この応用としてムーンシャイン加群の全自己同型群のいくつかの基本可換 2-群の正規化群を計算した. この計算においてモンスター単純群の群論的な性質を全く仮定していない. このようなモンスター単純群のムーンシャイン加群の全自己同型群として考察により新しい解釈が生まれることが期待される.

本論文の主定理である頂点作用素代数 $V_L^+$ の全自己同型群 $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ の計算法について簡単に述べる. 頂点作用素代数 $V_L$ の格子の自己同型 $-1$ の持ち上げ $\theta$ の固定点を $V_L^+$, $-1$-固有空間を $V_L^-$ とする. すると $V_L^-$ は既約 $V_L^+$-加群となる. 一般に頂点作用素代数の自己同型はその既約加群全体の集合へ作用することが知られている. そこで $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ の既約 $V_L^+$-加群全体への作用を考える. 次のような手順で $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ を決定する:

(1) $V_L^-$ の固定部分群 $H$ の決定.

(2) $V_L^-$ を含む軌道 $Q$ の決定.

(3) $G$ から $Q$ 上の置換群への写像の像, 核の決定.

(1): $H$ が $\mathrm{Aut}\,(V_L)$ における $\theta$ の中心化群 $C_{\mathrm{Aut}\,(V_L)}(\theta)$ の $V_L^+$ への制限と一致することを示した. よって $H = C_{\mathrm{Aut}\,(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle$ となる. $\mathrm{Aut}\,(V_L)$ はすでに決定されているので, $H$ を計算することが可能である.

(2): 自己同型の加群への作用は次数付き次元やフュージョン則を保つ. そこで $V_L^-$ と同じフュージョン則を持ち $V_L^-$ と次数 1 の空間の次元が一致する $R$ とする. すると $Q \subseteq R$ となる. この集合 $R$ は簡単な格子の計算によって求めることができる. $V_L^+$ の既約加群は twisted 型と untwisted 型の二種類に分けられる. そこで次の二通りの場合を考える.

(I) $Q$ が untwisted 型を含んでいる場合.
フュージョン則を用いて $Q$ と $R$ が一致することを示した. さらに (I) が成り立つ格子について考察した. $V_L^-$ と untwisted 型の既約加群の次数付き次元が一致していることなどから, $L$ は階数 8 または 16 の 2-基本等方偶格子であることがわかる. さらにユニモジュラかあるいは二進線形符号に関する構成法 B で実現可能であることを示した. 階数 8 または 16 のユニモジュラ格子は同型を除いて 3 つ存在していることが知られている. これらの格子に関して $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ と $H$ の指数が 2 以下であることがわかる. また, $L$ が二進線形符号に関する構成法 $B$ として得られる場合は可能性のある二進符号の重み関数を列挙した. $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ が有限群となるための必要十分条件は $L$ が長さ 2 の元を持たないことであるので, 有限群との関係を調べる立場においてはそのような格子が重要である. 長さ 2 の元を持たない階数 8, 16 の 2-基本等方偶格子は $E_8$ 格子を $\sqrt{2}$ 倍して得られる $\sqrt{2}E_8$ または階数 16 の Barnes-Wall 格子 $\Lambda_{16}$ と同型であることを示した。実際に, これらの格子に対して $V_L^+$ の自己同型群を決定し, $V_L^-$ の軌道が untwisted 型を含むことを確かめた.

(II) $Q$ が untwisted 型を含まない場合.
構成法 B で実現されている格子 $N$ に対して $V_N^+$ の例外型自己同型の構成が知られている. 例外型の意味は $V_N$ の自己同型の制限として得られない, すなわち $H$ の元ではないということである. 各 $R$ の元に対して, それが例外型自己同型で $V_L^-$ に移るような $L$ の構成法 B による実現があることを示した. 特に $Q$ と $R$ は一致することがわかる. (1) より $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ は $H$ とこれら例外型自己同型で生成されている.

(3) 軌道 $Q$ 上に構造を与え, 像をより詳しく調べた.

(I) の場合: 2-基本等方偶格子 $L$ に対して, $V_L^+$ の既約加群全体 $S$ がフュージョン則を積として二元体上の線形空間となり, その上に既約加群の次数付き次元から決まる自然な二次形式が定義できることを示した. したがって $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ から直交群 $O(S)$ への群準同型を得る. この写像の核は $V_L^-$ の固定部分群 $H$ に含まれるので, 計算可能である. 特に $L$ が $\sqrt{2}E_8$ または $\Lambda_{16}$ の場合には $H$ の像が $O(S)$ の極大部分群またはその指数 2 の部分群となっていることがわかり, $\mathrm{Aut}\,(V_{\sqrt{2}E_8}^+)$ と $\mathrm{Aut}\,(V_{\Lambda_{16}}^+)$ の構造が決定できる.

(II) の場合: $Q \cup \{V_L^+\}$ がフュージョン則を積として二元体上の線形空間となることを示した. よって, $\mathrm{Aut}\,(V_L^+)$ から一般線形群への群準同型を得る. この写像の核は $V_L^-$ の固定部分群 $H$ に含まれるので, 計算可能である. また, この写像が全射となるかどうかは格子の自己同型群に依存するため一般論を述べることは出来ないが, 多くの場合は全射となることが期待される. 実際に具体例で与えた格子については全射となっており, $V_L^+$ の全自己同型群を決定することが出来た.