

論文審査の結果の要旨

氏名 島倉裕樹

本論文において、島倉裕樹氏は正定値偶格子 L から標準的に構成される頂点作用素代数 V_L の標準的な対合 θ による固定点部分空間のなす頂点作用素代数 V_L^+ の自己同型群の構造を格子 L の情報から決定する手続きを与え、それをモンスター単純群のいくつかの極大 2-局所部分群の具体的記述に応用した。

頂点作用素代数は、1986年に Borcherds によって考案された代数系であり、理論物理学における弦理論やそれを記述する枠組みである共形場理論と密接な関係がある。それと関連して、アフィン Lie 代数の表現論や Virasoro 代数の表現論とも深い結びつきがある。

その一方で、Frenkel-Lepowsky-Meurman によって構成されたムーンシャイン加群と呼ばれる頂点作用素代数 V^h は、自己同型群が有限単純群モンスターと同型であり、ムーンシャインと呼ばれる現象を引き起こす重要な研究対象である。この立場からすれば、自己同型群が有限群となるような頂点作用素代数について、自己同型群の構造を具体的に決定することは、基本的かつ重要な問題である。

しかしながら、そのような頂点作用素代数の自己同型群を組織的に決定する研究はいまだなされていない。それは、既存の方法が個々の頂点作用素代数の特殊事情に立脚しているからであり、冒頭に述べた V_L^+ の場合も例外ではない。これに対し、島倉氏が本論文で与えた方法は、あらゆる正定値偶格子 L に対して原理的には適用でき、ほぼ一様な手続きで V_L^+ の自己同型群を決定できるという点で、これまでになく有力な方法である。

島倉氏の基本的なアイデアは、自己同型群を頂点作用素代数の既約加群の同型類の集合の置換として作用させることである。それ自体は良く用いられる手法であるが、その置換表現の中の特別な軌道に着目すれば自己同型群の概形が決まってしまうことに気づいたところが島倉氏の慧眼である。具体的には、 V_L^+ はその構成法から V_L^- と書かれる特別な既約加群を持っている。すると $\text{Aut}(V_L^+)$ における V_L^- の同型類の安定化群は $C_{\text{Aut}(V_L^-)}(\theta)/\langle \theta \rangle$ と同型であるが、その構造はすでに知られている結果を用いて具体的に計算できる。従って V_L^- の同型類の軌道 Q とその上への $\text{Aut}(V_L^+)$ の作用が決定されれば、 $\text{Aut}(V_L^+)$ の構造が決まるというわけである。

軌道 Q を決定する際には、ツイスト型と呼ばれるタイプの既約加群の同型類が軌道に含まれるかどうかで場合分けをする必要がある。いずれの場合も格子に関する情報から軌道 Q は具体的に決定されるのだが、そこで鍵となるのが、二進符号から格子を構成する方法の一つである構成法 B である。格子 L が構成法 B によって得られる場合には、その構成法から自然に V_L^+ の自己同型が

得られるのである。これは元来 Frenkel-Lepowsky-Meurman がムーンシャイン加群の構造を調べるときに用いた方法であるが、島倉氏は、このようにして得られる自己同型の V_L^- の同型類への作用を見ることによって、軌道 Q を決定した。さらに、 V_L^+ -加群に対するフュージョン則を考慮すると、軌道 Q に \mathbb{F}_2 上の代数構造を導入することができて、 $\text{Aut}(V_L^+)$ の置換表現はこの構造を保つように作用することも分かる。

島倉氏は、格子 L のいくつかの具体例について以上の手続きを適用し、細かい計算も実行して V_L^+ の自己同型群の構造を具体的に求めた。特に L が Leech 格子の部分格子である場合は興味あるケースである。そのときには、 V_L^+ がムーンシャイン加群 V^h の部分頂点作用素代数となるからである。

そのような V_L^+ を考え、その自己同型であって V^h の自己同型を誘導するようなものをとることによって、モンスターの部分群の具体的記述が得られる場合がある。島倉氏は、そのような具体例として L が $\sqrt{2}E_8$ 型の格子と階数 16 の Barnes-Wall 格子の場合を考え、対応する二つの V_L^+ のテンソル積の V^h への埋め込みから得られるモンスターの部分群を考察した。それは、極大 2-局所部分群と呼ばれるタイプの群の一つで、特に近年注目されているものになる。この方法によれば、この部分群がどのようにモンスターの中に埋め込まれているのかが具体的に記述されるので、モンスターの群論的構造の理解が深まるのではないかと期待される。

以上のように、本論文で得られた結果は、頂点作用素代数の理論に新風を吹き込むものであると同時に、旧くて新しい有限単純群の理論にも貢献が期待される第一級の業績であると考えられる。

よって、論文提出者 島倉裕樹 は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。