論 文 の 内 容 の 要 旨

On the zeta functions of prehomogeneous vector spaces for pair of simple algebras

(単純環のペアの概均質ベクトル空間のゼータ関数について)

氏名　谷口 隆

k を体とし，D を k 上次元が 4 または 9 の中心的単純環とする．D^{op} で D に反同形な単純環を表わす．代数群 G と線型空間 V を

$$G = D^{\times} \times (D^{\mathrm{op}})^{\times} \times \mathrm{GL}(2), \qquad V = D \otimes k^2 \tag{1}$$

とし，G の V への表現 ρ を

$$\rho(g)(a \otimes v) = (g_{11} a g_{12}) \otimes (g_2 v) \quad ただし \quad g = (g_{11}, g_{12}, g_2) \in G, a \in D, v \in k^2$$

によって定めると $(G, V) = (G, \rho, V)$ は概均質ベクトル空間になる．本論文ではこの概均質ベクトル空間について考察した．この概均質ベクトル空間を D の次元が 4 のとき D_4 型，9 のとき E_6 型と呼ぶ．この表現はそれぞれ

$$G' = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(2), \qquad V' = k^n \otimes k^n \otimes k^2$$

の $n = 2, 3$ の場合の k 形式であり，D が分裂している場合は (G, V) と (G', V') は k 上同変である．本論文では，概均質ベクトル空間 (G, V) の k-有理軌道のある解釈を与えた．また D が代数体 k 上分裂しない場合について，大域ゼータ関数の主要部を決定した．

具体的な内容について述べる前に，概均質ベクトル空間の定義を復習しておく．簡単のため，ここではある制限されたクラスの定義を与えることにする．

定義 1 体 k 上定義された連結簡約代数群の既約表現 (G, V) は以下の条件をみたすとき概均質ベクトル空間と呼ばれる．

(I) V は Zariski 開軌道を持つ．

(II) 零でない多項式 $P \in k[V]$ と G の指標 χ で，関係 $P(gx) = \chi(g)P(x)$ をみたすものがある．

標数 0 の閉体上の既約な概均質ベクトル空間は佐藤-木村 [6] によって分類されている．佐藤-新谷 [7] は，代数体上定義された概均質ベクトル空間に対して，大域ゼータ関数を定義した．

概均質ベクトル空間のゼータ関数の最右極の情報に，適切な局所理論を組み合わせることで，整数論的に興味深い密度定理が得られることがある．例えば，Datskovsky-Wright [1, 2] は新谷の 2 元 3 次形式の大域理論の結果を用いて，以下の Davenport-Heilbronn による密度定理の，ゼータ関数の理論による証明を与えた．

$$\sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=3\\ |\Delta_F|\le x}} 1 \sim \frac{x}{\zeta(3)} \qquad (x\to\infty)$$

ここに F は判別式の絶対値 $|\Delta_F|$ が x を超えないような 3 次体全体を走る．また，最近，Kable-雪江 [3, 4, 5] は 2 次 Hermite 形式の組の空間について考察し，雪江による大域理論の結果を用いて，これまでに知られていなかった新しい密度定理を証明した．この定理については [3] の Introduction を参照されたい．なおこの空間は D_4 型の別の k 形式である．

本論文の概均質ベクトル空間 (1) に戻る．主定理を述べよう．

定理 2 D を次元 m が 4 または 9 の非分裂な単純環とする．概均質ベクトル空間 (1) に付随する大域ゼータ関数 $Z(\Phi,s)$ は，領域 $\Re(s)>2m-2$ で $s=2m$ での可能な極を除き正則であり，$s=2m$ での極は $\tau(G_1)\mathfrak{V}_2\int_{V_{\mathbb{A}}}\Phi(x)dx$ で与えられる．

定数 $\tau(G_1),\mathfrak{V}_2$ および $V_{\mathbb{A}}$ 上の測度 dx は Section 4 で定義されるものである．Theorem 4.24 では他の全ての極の主要部もそれぞれ超関数を用いて記述されるが，密度定理のためには上の形で十分である．一方で，期待される密度定理を得るためには通常の Tauber 型定理だけでなく，適切な局所理論及び "フィルター化プロセス" と呼ばれる過程が必要であり，これらは将来別の論文で扱われる予定である．概均質ベクトル空間の大域ゼータ関数の極の情報から密度定理に至るプロセスについては，[1, 2] または [8] を参照されたい．

定理 2 の証明について簡単に述べておく．ゼータ関数を解析接続するために Poisson の和公式を用いた．この方法の場合，特異部の積分を実行するとき，V_k を G_k 軌道に分けると可積分にならないことが問題であり，発散積分を何らかの意味で解釈する必要がある．これについては，新谷による Eisenstein 級数を平滑化したものを用いて計算した．$D^\times$ の分裂階数は 0 なので，今回の場合の群 G の Eisenstein 級数は GL(2) の時と同じものでよい．

本論文の概均質ベクトル空間から期待される密度定理については Section 3 の結果を用いて Remark 3.10 で議論されるが，ここでも簡単にまとめておく．簡単のため $k=\mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{Q}$ の有限次拡大 F に対して，h_F, R_F でそれぞれ F の類数と単数基準を表わすものとする．

一般に，定義 1 の概均質ベクトル空間 (G,V) に対して，$V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}=\{x\in V_{\mathbb{Q}}\mid P(x)\ne 0\}$ とおき，また $\widetilde{T}=\ker(G\to \mathrm{GL}(V))$ とする．そして $x\in V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ に対して，G_x を x の固定部分群とし，G_x° をその単位連結成分とする．大雑把に言えば，大域ゼータ関数は，有理軌道の集合 $G_{\mathbb{Q}}\backslash V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ の点 G_kx たちを，$G_x^\circ/\widetilde{T}$ の正規化されていない玉河数の重みをつけて数え上げる関数である．したがって Proposition 3.6 および 3.7 により，D_4 型および E_6 型の (分裂の場合も非分裂の場合も) ゼータ関数の最右極の振る舞いが，それぞれ以下の x の関数

$$\sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2\\ |\Delta_F|\le x\\ F\text{ は } D \text{ に埋め込める}}} h_F^2R_F^2 \qquad \text{および} \qquad \sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=3\\ |\Delta_F|\le x\\ F\text{ は } D \text{ に埋め込める}}} h_FR_F$$

の $x \to \infty$ のときの漸近挙動の情報を導くことが期待される．

もし [3, 4, 5] などにあるフィルター化プロセスによる方法で上の密度を計算することが可能であれば，その場合は，F に有限個の局所的な条件を付け加えた場合の密度も同じ方法によって計算することが可能である．一方で，各々の単純環 D に対し，F が D に埋め込めるための F の条件が局所的な条件で表わされることも簡単に確かめられる．したがって，分裂の場合と非分裂の場合で，期待される密度定理はかなり似たものであることが予想される．

非分裂の場合を考える利点の一つは，大域理論が簡単になることである．大域ゼータ関数の解析は，群の分裂階数が増加するに従い非常に困難になることが通常であり，分裂の場合の D_4 型および E_6 型の極の主要部はまだ決定されていない．特に分裂 E_6 型の場合は分裂階数が 5 であり，極の主要部を計算する複雑さは相当のものであると考えられる．

参考文献

[1] B. Datskovsky and D.J. Wright. The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms II: Local theory. *J. Reine Angew. Math.*, 367:27–75, 1986.

[2] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.

[3] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields, I. *Tohoku Math. J.*, 54:513–565, 2002.

[4] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields, II. *J. Math. Soc. Japan*, 55:739–764, 2003.

[5] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields, III. *J. Number Theory*, 99:185–218, 2003.

[6] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.

[7] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.*, 100:131–170, 1974.

[8] A. Yukie. *Shintani zeta functions*, volume 183 of *London Math. Soc. Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.