論審査結果の要旨

氏名　谷口 隆

谷口隆氏はその博士論文 On the zeta functions of prehomogeneous vector spaces for pair of simple algebras において、ある種の外均質ベクトルのゼータ関数の解析的性質およびのその有理軌道の数論的解釈を与えた。代数体 k 上の 4 次元あるいは 9 次元の中心的単純環 D を考え、D 上の階数 2 の自由加群 V を考えると、代数群

$$G = D^{\times} \times D^{op} \times GL(2)$$

の作用が $V = D \otimes (\mathbf{Q}^2)$ に右からの D の作用、左からの D の作用、および $\mathbf{Q}^2$ のテンソル因子への作用を用いて定義される。この作用に関して V は概均質ベクトル空間となる。ここで概均質ベクトル空間とは $V(\mathbf{C})$ のある Zariski 開集合 V_{reg} 上に $G(\mathbf{C})$ が推移的に作用し、$V - V_{reg}$ の定義方程式が G の相対不変式であたえられているということである。より一般的な概均質ベクトル空間に対して、佐藤、新谷、雪江らによりゼータ関数が定義されており、さらに新谷、雪江らはある種のゼータ関数の解析的性質を用いて、与えられた数 x より判別式が小さい 3 次体の個数、2 次体の類数と単数基準の積の和を x の関数として漸近的にあらわす公式を得た。このような公式は一般に数論的な密度定理と呼ばれている。

この博士論文では二つのことを扱っている一つ目は V の G の作用に関する有理軌道を D の整数論的不変量を用いて表した。

定理 0.1. $n = 2, 3$ とし、D の次元を $m = n^2$ とする。V の有理軌道は D に埋め込み可能な n 次体と一対一に対応する。

さらにその軌道に対する固定化群を計算し、その非正規化玉河数が類数と単数基準の 2 乗で与えられることをしめした。この計算はこれからの研究テーマである密度定理を得るために用いられる。

二つ目に、D が division algebra の時に V のゼータの解析性質を扱っている。その主定理は次のようなものである。

定理 0.2. 上の定理にさらに D が *division algebra* であると仮定する。Φ を V のアデール化上の急減少関数に対して、大域的ゼータ関数 $Z(\Phi, s)$ は $Re(s) > 2m - 2$ において $s = 2m$ において高々単純な極を除いて、正則関数となる。さらに $s = 2m$ での極は、$\tau(G_1) D_2 \int_{V_{\mathbf{A}}} \Phi(x) dx$ で与えられる。$\tau(G_1)$ と D_2 は群 G と体 k により決定される数である。

論文の前半部分と合わせれば、この定理から D の次元がそれぞれ $4, 9$ の時それぞれ、

$$\sum_{[F:\mathbf{Q}]=2, |\Delta_F|<x, F \text{ embeddable to } D} h_F^2 R_F^2,$$

$$\sum_{[F:\mathbf{Q}]=3, |\Delta_F|<x, F \text{ embeddable to } D} h_F R_F$$

を x の関数として漸近的に評価する密度定理が期待される。二つ目の定理においてゼータ関数の解析接続のために Poisson の和公式を適用した。このとき特異部分の積分を実行するとき、V_k を G_k 軌道に分けると、可積分とならないことが問題となる。その発散部分を何らかのいみで解釈することが必要となってくる。そのために用いられたのが、新谷による Eisenstein 級数による平滑化のテクニックである。$D^\times$ の分裂階数が 0 なので用いられる Eisenstein 級数は $GL(2)$ と同じものでよい。

この研究により、期待される密度定理は D が分裂するときの密度定理の一部となっていることを考えると、懸案であった分裂するばあいの研究の足ががりとなる点が評価される。またここで使われる整数論の手法を見ても、その能力は十分評価できるものである。したがって、論文提出者　谷口隆　氏は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。