論文の内容の要旨

論文題目

WKB solutions for microdifferential equations with fractional power singularities

(分数ベキの特異点をもつ擬微分方程式の WKB 解)

氏名　千葉 康生

次のような偏微分方程式を考える.

$$P(x,\partial_x,\partial_z)u(x,z) = \left\{\partial_x^m + a_1(x)\partial_z\partial_x^{m-1} + a_2(x)\partial_z^2\partial_x^{m-2} + \cdots + a_m(x)\partial_z^m\right\} u(x,z) = 0. \tag{1}$$

ここで ∂_* は $\partial/\partial *$ $(* = x,z)$ を表し, 各 $a_j(x)$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ は正則であるとする.
この方程式に合計 3 つの仮定を課す.

仮定 1. $P(x,D_x,D_z)$ の主表象 $\sigma(P)(x,\xi,\zeta)$ は $(0,0;0,\sqrt{-1}\dot{\eta})$ の近傍で次の形をしているものとする.

$$\sigma(P)(x,\xi,\zeta) = \prod_{j=1}^{m}(\xi - x^\lambda\alpha_j(x)\zeta), \tag{2}$$

ここで λ は正の数, 各 $\alpha_j(x)$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ は原点の近傍で解析的とする. さらに, 各 $\alpha_j(0)$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ は互いに異なるものとする.

我々は方程式 (1) において, 超局所解析の考えに基づいて, ∂_z を大きいパラメータ ζ とみなすことにする. つまり,

$$P(x,D_x,\zeta) = D_x^m + a_1(x)\zeta D_x^{m-1} + a_2(x)\zeta^2 D_x^{m-2} + \cdots + a_m(x)\zeta^m \tag{3}$$

という, 大きいパラメータつきの作用素を考えることにする. ここで, D_x で d/dx を表すことにする.
さて, この作用素に対して, 次のような操作を行い変形する.
まず, $x^m P$ を計算し,

$$y = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

という分数ベキ変換をする. さらに, マイクロ函数をマイクロ函数に変換する, 量子化 Legendre 変換

$$\beta_k : \begin{cases} \dfrac{d}{dy} = -\zeta w, \\ y = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{d}{dw}, \end{cases} \tag{4}$$

を行う.

仮定 2 (Levi condition). $k = 1, 2, \cdots, m$ に対して,

$$a_k(x) = x^{l_k} b_k(x), \ \ l_k \geq k\lambda, \tag{5}$$

と仮定する. ただし, $b_k(x)$ は解析的である.

すると, 作用素 P は次の P_L に変換される.

$$\begin{aligned} P_L(w, D_w, \zeta) &= \left\{ \sum_{k=0}^{m} \widetilde{b_k}\left((\zeta^{-1} D_w)^{\frac{1}{\lambda+1}} \right) (-w)^{m-k} \right\} D_w^m \\ &\quad + c_1\left(w, (\zeta^{-1}D_w)^{\frac{1}{\lambda+1}} \right) D_w^{m-1} + \cdots + c_m\left(w, (\zeta^{-1}D_w)^{\frac{1}{\lambda+1}} \right), \end{aligned}$$

ただし, $c_0 (= D_w^m$ の係数$)$, $c_1, \cdots, c_m$ は $\zeta^{-1}D_w$ に関して 0 階の擬微分作用素である.

仮定 3. P_L に対して, 次を仮定する.

$$c_1(w, 0) / \partial_w c_0(w, 0)\big|_{w=0} \notin \mathbb{Z}. \tag{6}$$

[KtS] の理論により, 量子化接触変換することで, 最終的に我々は

$$P = w \prod_{j=2}^{m} (w - \beta_j) D_w^m + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k(w, D_w, \zeta) D_w^{m-k} \tag{7}$$

という擬微分方程式を考えることになる. ここで, 各 β_j $(j = 2, 3, \cdots, m)$ は互いに異なり, γ_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ は 0 階以下の擬微分作用素 $\mathscr{E}_X$ の元である.

以上の準備の下に, 大きいパラメータの負ベキ, つまり小さいパラメータを含む WKB 解を構成するのであるが, 実際に構成するのは, 境界値をもつようなマイクロ函数に作用するような擬微分作用素 $U(w, D_z)$ である. 以下がその手順である.

P を次の 2 つの部分に分ける.

$$\begin{cases} L_0 = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \gamma_j(w, 0) D_w^{m-j}, \\ R = L - L_0, \end{cases} \tag{8}$$

ここで,

$$R = \sum_{j=0}^{m} \widetilde{\gamma}_j(w, \zeta^{-1}D_w) \zeta^{-\frac{1}{\lambda+1}} D_w^{m-j+\frac{1}{\lambda+1}}. \tag{9}$$

の形に書ける. WKB 法を用いる量子力学の言葉を借りれば, L_0 は古典力学が現れる項であり, R は小さいパラメータを含む量子力学部分であると言える.

そして 解 $U_k=\sum_{j=-\infty}^{0}U_{jk}(w,\zeta)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ に対して, 次のような逐次近似のスキームを入れる.

$$\begin{cases} L_0U_0=0, \\ L_0U_{k+1}=-R\circ U_k \qquad (k=0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{10}$$

このスキームは $L(w,D_w,D_z)U(w,D_z)\equiv 0$ ($\mod \mathscr{E}_X\cdot D_w$) と同値になる.

したがって, ここで問題になるのは収束性であるが, これは次の形式ノルムによって保証される.

定義 1 (正則型). $U=\sum_{j=-\infty}^{0}U_j(w,\zeta)$ の 各項 $U_j(w,\zeta)$ は $D_\nu(\alpha)=\{(w,z;\tau,\zeta)\in T^*(\mathbb{C}_w\times\mathbb{C}_z^n);|w-\alpha|\le 1+\nu,|z-\dot{x}|\le\nu,|\tau|/|\zeta|+|\zeta/|\zeta|-\sqrt{-1}\dot{\eta}/|\eta||\le\nu\}$ で正則とする. このとき, $m'=0,1,2,\cdots$ に対して, 形式ノルム $N_{m'}(U;T)$ を次で定義する.

$$N_{m'}(U;T):=\sum_{p,\beta,l}\frac{p!|\zeta|^{p+|\beta|}}{(p+l)!(p+|\beta|)!}\max_{0\le k\le m'q+q-1}\|\partial_w^{k/q+l}\partial_\zeta^\beta U_{-p}\|T^{2p+l+|\beta|}\ . \tag{11}$$

ただし, $\|U\|=\sup_{w\in D(\alpha)}|U(w)|$ とする.

定義 2 (非正則型). $U=\sum_{j=-\infty}^{0}U_j(w,\zeta)$ の 各項 $U_j(w,\zeta)$ は $\{w\in\Omega(\alpha)\}\cap D_\nu(\alpha)$ で正則とする. このとき, $m'=0,1,2,\cdots$ に対して, 形式ノルム $N_{m'}^{\mu}(U;T)$ を次で定義する.

$$N_{m'}^{\mu}(U;T):=\sum_{p,\beta,l}\frac{p!|\zeta|^{p+|\beta|}}{(p+l)!(p+|\beta|)!}\max_{0\le k\le m'q+q-1}\|\partial_w^{k/q+l}\partial_\zeta^\beta U_{-p}\|_{\mu+k+l+|\beta|+p-\kappa(m')}T^{2p+l+|\beta|} \tag{12}$$

ただし, $\|U\|_\mu=\sup_{w\in\Omega(\alpha)}|w|^\mu|U(w)|$ であり, $\kappa(m')$ は $\kappa(0)=0$, $\kappa(m')=m'-1$ $(m\ge 1)$ を満たすものとする.

以上のノルムに基づいて, L_0 および R を評価し, 次の定理を得る.

定理 3 (正則型). $U_0\equiv U_{00}$ を $D_\nu(\supset\{w\in\mathbb{C};|w|\le 1\}\times\{(\dot{x};\sqrt{-1}\dot{\eta})\})$ での, $LU_0=0$ の, ζ に関して 0 次斉次な任意の解とする. 各 $U_k=\sum_{j=-\infty}^{0}U_{jk}$ $(k=1,2,\cdots)$ は $D_{\nu/2}$ で

$$\partial_w^l U_k|_{w=0}=0\ \ (l=0,1,2,\cdots,m-2;k\ge 1)$$

を満たす形式表象とする. このとき, $U=\sum_{k=0}^{\infty}U_k$ は形式ノルム $N_m(\cdot;T)$ に関して $\{(z;\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;|z-\dot{x}|\le\nu/2,|\zeta/|\zeta|-\sqrt{-1}\dot{\eta}/|\eta||\le\nu/2\}$ 上一様収束し, 擬微分方程式

$$(L_0+R\circ)U=0$$

の解となる.

非正則解に関しても領域を変えれば同様の結果が成り立つ.

参考文献

[KtS] Kataoka, K. and Sato, Y., *Formal symbol type solutions of Fuchsian microdifferential equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **9**, pp.565–626 (2002).