論文審査の結果の要旨

氏 名：　千葉　康生

本論文提出者は，分数ベキの特異点を持つ擬微分方程式の WKB 解に関する研究を行った。すなわち $x=0$ で m 重の変わり点をもち，大きいパラメータ ζ を含む，$\mathbb{R}$ 上の解析的常微分方程式

$$P(x,\partial_x,\zeta)u(x,\zeta)=(\partial_x^m+a_1(x,\zeta)\partial_x^{m-1}+\cdots+a_m(x,\zeta))u(x,\zeta)=0$$

を考える．ここで $a_j(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{jk}(x)\zeta^k$ と書けて各 $a_{jk}(x)$ は $x=0$ の近傍で解析的であり，適当な自然数 λ と $x=0$ における解析関数 $\alpha_1(x),\cdots,\alpha_m(x)$ に対し作用素 P の主シンボルは原点の近傍で

$$\sigma(P)(x,\xi,\zeta)=\prod_{j=1}^{m}(\xi-x^\lambda\alpha_j(x)\zeta)$$

と書けるものである．論文提出者の研究課題はこの方程式の $x=0$ 付近での解の構造の研究を，いわゆる WKB 解析の手法をとらずに，超局所解析の方法を用いて数学的に厳密に行い，その結果を WKB 解析での結果と比較研究することである．WKB 解析については最近京都大学数理解析研究所のグループを中心として，いわゆる「精密 WKB 解析」の名前で精緻な研究が続けられているが，発見的手法で構成した漸近的解に対して真の解が存在するのか，またなぜそのような方法が有効なのか，など理論的に解明すべき点は残されている．超局所解析による方法とはこれに対し最初から精密な理論的解析に基づく方法でこの問題を研究する．すなわち大きなパラメータ ζ を逆に偏微分作用素 $\zeta=\partial_t$ ととらえて 2 変数の偏微分方程式

$$P(x,\partial_x,\partial_t)u(x,t)=(\partial_x^m+a_1(x,\partial_t)\partial_x^{m-1}+\cdots+a_m(x,\partial_t))u(x,t)=0$$

を考える．このとき，この方程式の任意の超局所解（マイクロ関数解）の t に関する部分フーリエ変換（または部分ラプラス変換）は最初の方程式の漸近解に対応することが容易に示せる．他方，このこのような主シンボルをもつ偏微分方程式は特に各 $\alpha_j(x)$ が実数値である場合，$x=0$ に多重特性根をもつ双曲型方程式に対する解の特異性分岐問題，として多変数の場合も含めて多くの数学者によって研究されてきた．特に天野-中村 (C^∞ 級係数の場合), 高崎 (実解析的係数の場合) らによるパラメトリックスの構成が際だっている．しかし彼らの方法は相関数を用いて解を振動積分の形に表していく，という，昔からの方法によるので最終的に問題をある種の不確定特異点を持つ常微分方程式のストークス解析に帰着せざるを得ない．この場合，$m=2$ のときは対応する常微分方程式が昔からよくわかっているのでよいが，$m\geq 3$ のときの構造を具体的に解析することは困難であった．これに対し山根は博

士論文の中で片岡による，分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換の方法によるアイデア，に基づき $m=2,3$ のときの具体例について，解の構成および特異性分岐の問題が Riemann 球面上に $m+1$ 個の確定特異点をもつ極めて具体的な常微分方程式の解の構造の解析に帰着されることを示した．実際， $m=3, \lambda=1$ のときの分岐条件を具体的に与えることにも成功している．しかし $m=3, \lambda=1$ のときであっても係数関数が一般であれば分数ベキ座標変換の副作用として $x^{1/(\lambda+1)}$ のような， $x=0$ にベキ型の特異性をもつ関数が係数に現れる．実際，このような関数をこの種の問題で重要となる，ヘビサイド関数 $Y(x)$ にかけることは通常の超関数論では許されていない．

論文提出者はこのような状況下で一般の m および係数関数に対し，山根のいう，Pure-solutions を構成することを目指した．それには，まず問題の特殊性を使えばこのような特異な掛け算を正当化ができること，しかも量子化 Legendre 変換の下ではそれが正則パラメーターをもつ大域的なマイクロ関数に対する分数ベキ微積分作用素に対応することを示した．次にいわゆ低階項に対する Levi 条件の下では分数ベキ項の影響は解の特異性の主要項には影響を与えず，山根が与えた Riemann 球面上の $m+1$ 個の確定特異点をもつ常微分方程式がやはり解の特異性の主要項を支配することを示した．そして最終的に，片岡-佐藤芳光らによる，フックス型擬微分方程式に対する形式シンボル型の正則パラメータつきマイクロ関数解の構成法にならい，Riemann 球面上で逐次近似的に形式シンボル型解を構成するのに成功した．この形式シンボル型解を逆量子化 Legendere 変換すれば直ちに元の方程式に対する，特異性が最小のマイクロ関数解，すなわち Pure-solutions が得られる．

所期の目的であった WKB 型解との比較研究までには至らなかったが，解の構成にあたって通常の超局所解析の枠を越える，ベキ型特異性を持つ演算を正当化して有効に用いたことは高く評価できる．特にその逐次近似法においては片岡-佐藤の場合よりはるかに困難な，摂動項が分数ベキ特異性をもつだけでなく主導項と同じ階数をもつ，という状況下で独創的な対処法を発見して収束の評価を得たことは極めて高く評価でき，結果とともに今後この方面の発展に大きく寄与すると思われる．

よって, 論文提出者　千葉　康生　は, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。