論文の内容の要旨

論文題目　Stochastic Differential Equations and Mathematical Finance (確率微分方程式と数理ファイナンス)

氏名　中山季之

本論文ではサポート定理 (確率微分方程式の解のパスの分布のサポートを記述) と BSDE (バックワード型確率微分方程式) に関する考察が中心となる．主な研究動機は数理ファイナンスにおける次の 2 つである．

1. 金利モデルの一種である HJM (Heath-Jarrow-Morton) モデルにおける SPDE (確率偏微分方程式) から発生し得る金利の期間構造を特徴付ける．

2. マルコフ型とは限らない BSDE の時間と空間を離散化して数値的に解く方法の開発とその正当化．

ここでいう HJM モデルにおける SPDE とは, B^j をブラウン運動として

$$dr(t,x) = \frac{\partial r}{\partial x}(t,x)\ dt + \Big(\sum_j \sigma_j(t,x)\int_0^x \sigma_j(t,u)du\Big)\ dt + \sum_j \sigma_j(t,x)dB^j(t)$$

のような形をしている．このような形の SPDE を Da Prato and Zabczyk の流儀に従って無限次元の SDE として意味付けることが数理ファイナンスにおいてしばしば行われる．無限次元の SDE に対するサポート定理としては Aida による結果があるがこの場合に適用することはできない．この場合も含むようにサポート定理を拡張することができれば, 不変性定理 (SDE の解が特定の集合に留まるための必要十分条件を与える) が証明でき, 金利モデルにおける "consistency problems" (Björk, Filipović 等) においても意味をなす．またデリバティブを評価する際, 満期におけるキャッシュ・フローを終端条件とした確率微分方程式が登場することがしばしばある．これらを BSDE の問題として研究したものとしては Karoui, Peng and Quenez 等がある．数理ファイナンスに登場する BSDE はマルコフ型とは限らないが, 非マルコフ型の場合にはまだ数値計算手法が確立されていない．

以上に述べたことを動機として, 本論文では主に次の 2 つの問題を解いた．

1. 無限次元 SDE に対するサポート定理の拡張

2. マルコフ型とは限らない BSDE に対して時間と空間を離散化したバックワード型確率差分方程式の構築とその収束証明

さらに 1 を使って不変性定理を証明した. 2 に関しては BSDE を差分近似したものが元の BSDE へ収束することを証明するために, ポーランド空間上の確率変数と確率測度の組からなる空間上のある距離に関する収束定理を構築した.

以下ではここに掲げた 2 つの問題について概略を述べる. 1 については可分ヒルベルト空間 H 上の SDE

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t)dt + b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \\ X(0) = x_0 \in H \end{cases}$$

の mild solution (下式参照) に対するサポート定理の構成を行った. ここで $A\colon D(A) \to H$ は H 上の任意の (C_0)-半群 $(S(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素 (先の例の 1 階の微分作用素だけに限らない) であり, $(B(t))_{t\in[0,T]}$ は可分ヒルベルト空間 U に値を取る Q-ウィナー過程 (Da Prato and Zabczyk の意味, Q は U 上の核型狭義正定値作用素) であり, b や σ にはある条件を課す. なお, 有限次元 SDE に対する結果として Stroock and Varadhan や Aida, Kusuoka and Stroock そして Millet and Sanz-Solé 等による結果がある. 無限次元 SDE に対しては, A に関する項が無い場合の Aida による結果がある. 今回は解が $D(A)$ に留まるようにできない可能性があり, 一般には

$$X(t) = x_0 + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s)$$

と書けないので, 方程式

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)b(X(s))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(X(s))dB(s)$$

により定義される mild solution (Da Prato and Zabczyk) を考える. 従って今回は伊藤の公式による計算等ができないといった困難がある.

次に空間 $U_0 = Q^{1/2}(U)$ を考え, 区分的連続微分可能な写像 $h\colon [0,T] \to U_0$ で $h(0) = 0$ をみたすようなものの全体を $\mathcal{C}^1$ で表し, 写像 $h \in \mathcal{C}^1$ に対して次の微分方程式の mild solution を $\xi(\cdot) = \xi(\,\cdot\,; h)$ と表す.

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + (b-\rho)(\xi(t)) + \sigma(\xi(t))\dot{h}(t), \\ \xi(0) = x_0. \end{cases}$$

但し $\rho\colon H \to H$ はある仮定の下に定義される「修正項」である. そして集合 $\mathcal{L} = \{\xi(\,\cdot\,; h)\ ;\ h \in \mathcal{C}^1\} \subset C([0,T]; H)$ を考える. 以上の設定下で

$$\operatorname{supp} X(\cdot) = \bar{\mathcal{L}}$$

が成り立つことを本論分では証明した. 但し, $\operatorname{supp} X(\cdot)$ は $C([0,T]; H)$ における分布 $P \circ X^{-1}$ のサポートを表し, $\bar{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の $C([0,T]; H)$ における閉包を表す.

次に 2 番目の目標である BSDE に関して述べる. $W = D([0,1]; \mathbf{R}^m)$ 上の coordinate mapping process を $(B(t))_{t\in[0,1]}$, 即ち $B(w,t) = w(t)$, $w \in W$, $t \in [0,1]$ とし, W 上の 標準 Wiener measure を μ とおく. さらに フィルトレーション $\mathcal{F}(t) = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma\{B(s)\,; s \leq (t+\epsilon) \wedge 1\}$ を導入する. 対象とする BSDE は

(W,μ) 上の (Y,Z) に関する次のような方程式である (一般性を失うことなく区間 $[0,1]$ で考える).

$$\begin{cases} -dY(t) = f(B(\cdot),t,Y(t),Z(t))dt - Z(t)^* dB(t), \\ Y(1) = \xi. \end{cases}$$

即ち次の確率積分方程式をみたす解 (Y,Z) を考える.

$$Y(t) = \xi + \int_t^1 f(B(\cdot),s,Y(s),Z(s))ds - \int_t^1 Z(s)^* dB(s), \quad t \in [0,1].$$

但し $*$ は行列の転置を表わす. 写像 $f\colon W \times [0,1] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{m\times d} \to \mathbf{R}^d$ や $\mathcal{F}(1)$-可測な写像 $\xi\colon W \to \mathbf{R}^d$ にある条件を与え, 解の存在と一意性を最初に証明したのは Pardoux and Peng である.

本論文で構築した差分方程式について述べるために記号の準備をする. 一般の位置にある $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1} \in \mathbf{R}^m$ をとる. 即ち $\{e_1 - e_{m+1}, e_2 - e_{m+1}, \ldots, e_m - e_{m+1}\}$ は線形独立である. さらに $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1} \in (0,1)$ が与えられていて

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i e_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i e_i \otimes e_i = I$$

がみたされている状況を考える. 但し I は m 次の単位行列とする. ある確率空間 $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ 上の独立で同分布に従う $\mathbf{R}^m$-値確率変数 $\eta_N(n), n = 1,2,\ldots,N$ を, 分布が $P_N(\eta_N(n) = e_i) = p_i$ で与えられるように取る. ランダムウォークを次のように定義する.

$$S_N(n) = \sum_{k=1}^{n} \eta_N(k),\ n = 1,2,\ldots,N, \qquad S_N(0) = 0.$$

このランダムウォークに対して次のような連続時間確率過程を考える.

$$B_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} S_N([Nt]), \qquad t \in [0,1].$$

(Ω_N, P_N) 上で次のような (y_N, z_N) に関するバックワード型の確率差分方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta y_N(n) = \frac{1}{N} f(B_N(\cdot), \frac{n-1}{N}, y_N(n-1), z_N(n)) \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{1}{\sqrt{N}} z_N(n)^* \Delta S_N(n), \quad n = 1,2,\ldots,N, \\ y_N(N) = \xi(B_N(\cdot)). \end{cases}$$

但し離散時間確率過程 $(x(n))$ に対して $\Delta x(n) = x(n) - x(n-1)$, $n = 1,2,\ldots N$ と定めた. 十分に大きい N に対してこの差分方程式の解の存在と一意性をまず証明した. 連続時間確率過程 $(\bar{y}_N(t), \bar{z}_N(t))_{t\in[0,1]}$ を

$$(\bar{y}_N(t), \bar{z}_N(t)) = (y_N(\lfloor Nt \rfloor), z_N(\lceil Nt \rceil)), \qquad t \in [0,1]$$

により定義する ($\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数, $\lceil x \rceil$ は x を下回らない最小の整数). 以上の設定下で, $W \times D([0,1];\mathbf{R}^d) \times L^2([0,1];\mathbf{R}^{m\times d})$ 上の分布の弱収束の意味で

$$P_N \circ (B_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N)^{-1} \to \mu \circ (B,Y,Z)^{-1}, \quad N \to \infty$$

が成り立つことを本論分では証明した.