論文審査の結果の要旨

氏名　中山季之

本論文では確率微分方程式の解が与える連続関数空間上の確率分布の台を決定するという問題を考察している。

可分ヒルベルト空間 H 上の確率微分方程式

$$\begin{cases} dX(t) &= AX(t)dt + b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \\ X(0) &= x_0 \in H \end{cases}$$

を考える。ここで $A: D(A) \to H$ は H 上の (C_0)-半群 $(S(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素であり, $(B(t))_{t\in[0,T]}$ はある可分ヒルベルト空間 U に値を取る Q-ウィナー過程 (Da Prato-Zabczyk の意味, Q は U 上の核型狭義正定値対称作用素) であり, $b: H \to H$ や $\sigma: H \to \mathcal{L}_2(U_0; H)$ はある正則条件を満たすと仮定する（ U_0 は $U_0 = Q^{1/2}(U)$ で与えられるヒルベルト空間)。この方程式に対する mild solution とは以下の確率積分方程式の解である。

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)b(X(s))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(X(s))dB(s)$$

この mild solution の与える $C([0,T] \to H)$ 上の確率測度の台を supp $X(\cdot)$ で表すことにする。

区分的に連続微分可能な関数 $h: [0,T] \to U_0$ で $h(0) = 0$ をみたすようなものの全体を $\mathcal{C}^1$ で表し, $h \in \mathcal{C}^1$ に対して次の微分方程式の mild solution を $\xi(\cdot) = \xi(\,\cdot\,; h)$ と表すことにする。

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + (b-\rho)(\xi(t)) + \sigma(\xi(t))\dot{h}(t), \\ \xi(0) &= x_0. \end{cases}$$

但し $\rho: H \to H$ はある「修正項」である。$C([0,T]; H)$ の部分集合 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L} = \{\xi(\,\cdot\,; h)\ ;\ h \in \mathcal{C}^1\}$ で与える。

以上の設定の下で、次のサポート定理を示した。

定理　supp $X(\cdot) = \bar{\mathcal{L}}$

但し, $\bar{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の $C([0,T]; H)$ における閉包を表す。

サポート定理は有限次元空間上の確率微分方程式に対しては Stroock-Varadhan らの結果があり、無限次元の場合は会田による結果がある。しかし、A が非有界である場合の一般的枠組みでのサポート定理は本論文で初めて示された。証明も pinned Brownian motion の導入など、新しい方法が用いられている。

論文ではまた、このサポート定理のファイナンスに対する以下のような応用も論じている。金利の期間構造を記述するモデルとして、以下のような確率偏微分方程式が用いられる。

$$dr(t,x)$$
$$= \frac{\partial r}{\partial x}(t,x)\, dt + (\sum_{j=1}^{\infty}(\sigma_j(t,x)\int_0^x \sigma_j(t,u)du))\, dt + \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j(t,x)dB^j(t)$$

この方程式の解が特定の集合にとどまるための条件をサポート定理を用いて示した。この結果は Björk, Filipović らの結果の拡張となっている。

論文ではまた Backward な確率微分方程式の差分近似の問題も取り扱っており、ブラウン運動をランダムウォークで近似した場合に対応する Backward な確率差分方程式の解が Backward な確率微分方程式の解に法則の意味で収束することを示している。Backward な確率微分方程式に対しては、このような極限定理は今まで知られていなかった。この結果は Backward な確率微分方程式の数値計算の道を開くものである。

このように本論文では確率微分方程式の理論的研究のための新しい方向性を打ち出し、有効な定理を示しており、高く評価できるものである。

よって、論文提出者　中山 季之　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。