論文の内容の要旨

論 文 題 目:
Application of Stochastic Flows to Optimal Portfolio Strategies
(最適ポートフォリオ戦略における確率的流れの応用について)

氏 名: 深谷 竜司

数理ファイナンスの分野において，多期間最適ポートフォリオ問題は古典的な問題である．Merton(1969,1971) は証券価格が係数が定数であるような伊藤型確率微分方程式の解で与えられ，短期金利が固定値であり，投資家の効用函数が Hyperbolic Absolute Risk Aversion 型 (HARA 型) の場合の，投資家の多期間最適ポートフォリオ問題を定式化した．確率的多期間最適化問題に確率制御の手法を適用し，対応する非線型偏微分方程式 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式) を解くことで，具体的な最適ポートフォリオ戦略を与えた．しかしながら，金融資本市場の実証分析の結果から，価格過程の係数や短期金利が定数 (つまり，investment opportunity set が決定論的) との制約を緩めた問題の重要性が認識されるようになった．investment opportunity set が確率的である場合，最適ポートフォリオ戦略が myopic portfolio と，将来の金融環境の変化に対応してこれらをヘッジするような部分即ち nonmyopic portfolio に分解されること，さらに nonmyopic portfolio の挙動に対する研究が金融経済学における重要なテーマとなった．一方，派生商品の価格付け理論において成功をおさめたマルチンゲール・アプローチを多期間最適ポートフォリオ戦略に適用し，investment opportunity set が確率的な場合においても適用される一般的な手法を構築したのが，Karatzas-Lehoczky-Shreve(1987) と Cox-Huang(1989) である．確率的多期間最適化問題と同値な静的最適化問題を導出し，convex duality アプローチを用いて最適消費率と最適最終消費をそれぞれ確率過程および確率変数として求める．これらからポートフォリオ過程を定義して，これに対してマルチンゲール表現定理を適用し最適ポートフォリオ戦略を求めた．更に Ocone-Karatzas(1991) は Malliavin Calculus と Clark-Ocone 公式を適用して，最適ポートフォリオ戦略の解を Malliavin 微分の条件付き期待値計算に帰着できることを示した．Detemple-Garcia-Rindisbacher(2003) では investment opportunity set の確率的挙動が複雑な場合においても，Monte Carlo シミュレーションなどを用いてポートフォリオを数値計算することが可能であることを示した．また Takahashi-Yoshida(2001) は Malliavin Calculus と漸近展開法を組み合わせて最適ポートフォリオ戦略の解析的近似解を与える方法を導いた．

本論文では，最適ポートフォリオ戦略をモンテカルロ・シミュレーション等で確率論的に計算するために確率的流れを応用した新しいフレームワークを考察する．考察対象とする投資家の効用函数に経済状態に依存する要素を加えて，従来研究されてきた多期間最適ポートフォリオ問題を拡張する．証券価格や短期金利の確率微分方程式の係数が，あるマルコフ過程の函数として与えられる金融資本市場を考え，これらの設定のもと，最適ポートフォリオ戦略がフィードバック・コントロール解として求めるための十分条件を与える．このフィードバック・コントロール解は推移半群を作用させて得た新たな函数の有理式として表現され，即ちミューチャル・ファンド分離定理の一種の拡張となっていることに注意する．(Theorem 2.2.1) また，効用函数が HARA 型で一定の条件を満たすとき，よりチェックしやすい十分条件を与えた．(Theorem 2.5.3, Theorem 2.5.4) また，株式–債券- -キャッシュ配分問題 (Section 2.6) や日本債券市場における最適ポートフォリオ戦略 (Chapter 3) などを具体的に考察する．以下，メインとなる主張を概説する．

経済状態を表す確率変数，$X(t)$ は $\mathbb{R}^n$-値連続確率過程，$X(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$. $X(t)$ は次の位置パラメータ付き伊藤型確率微分方程式の解であるとする．

$$X(t; s, x) = x + \int_s^t \mu^X(v, X(v; s, x))dv + \int_s^t \sigma^X(v, X(v; s, x))dB(v).$$

時間 t における短期金利を $r_t = r(t, X(t))$ で定める．d 個の証券価格を $S_i(t), i = 1, \cdots, d$ とする，但し $S_i(t)$ は $\mathbb{R}$-値確率過程で次の確率微分方程式の一意的な解とする．

$$S_i(t) = S_{i,0} + \int_0^t \mu_i(v, X(v))S_i(v)dv + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j}(v, X(v))S_i(v)dB_j(v), \qquad i = 1, \cdots, d.$$

次の確率過程を定義する．$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\Pi(t; s, x) = \exp\left\{ -\int_s^t r(v, X(v; s, x))dv - \sum_{j=1}^d \int_s^t \lambda_j(v, X(v; s, x))dB_j(v) - \frac{1}{2}\int_s^t \sum_{j=1}^d \lambda_j(v, X(v; s, x))^2 dv \right\}.$$

$g_0(t, x), g_1(t, x), \cdots, g_d(t, x)$ および $h_0(t, x), h_1(t, x), \cdots, h_d(t, x)$ はそれぞれ $[0, T_0] \times \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への函数とし，$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_0$ および $x \in \mathbb{R}^n$ に対して位置パラメータ付き確率過程を次のように定義する．

$$\Delta(t; s, x) = \exp\left\{ \int_s^t g_0(v, X(v; s, x))dv + \sum_{j=1}^d \int_s^t g_j(v, X(v; s, x))dB_j(v) \right\},$$

$$E(t; s, x) = \exp\left\{ \int_s^t h_0(v, X(v; s, x))dv + \sum_{j=1}^d \int_s^t h_j(v, X(v; s, x))dB_j(v) \right\}.$$

$U_0 : (w_0, \infty) \to \mathbb{R}$ および $u_0 : (c_0, \infty) \times [0, T_0]$, 但し $w_0 \geqslant 0$, $c_0 \geqslant 0$ を決定論的効用函数とする．$I_1 : (0, \infty) \times [0, T_0] \to (c_0, \infty)$ および $I_2 : (0, \infty) \to (w_0, \infty)$ をそれぞれ $\partial u_0/\partial w$, U_0' の逆函数とする．

状態に依存する函数 $U : (w_0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ および $u : (c_0, \infty) \times [0, T_0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$U(w, \omega) = \frac{U_0(w)}{\Delta(T_0)}, \quad u(w, t, \omega) = \frac{u_0(w, t)}{E(t)}.$$

以上の設定のもと，状態に依存する効用函数 $V : D \to \mathbb{R}$ を次式で定義する．

$$V(C, Z) = E^P\left[\int_0^{T_0} u(C(v), v, \omega)dv + U(Z, \omega) \right].$$

関数, $H : \Theta \to \mathbb{R}$, $G : \Theta \to \mathbb{R}$, $\mathcal{X}_i : \Theta \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, d$, 但し $\Theta : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \times (0,\infty) \times [0, T_0]$, を次のように定義する: $(\xi, x, \zeta, \nu, t) \in \Theta$ に対して,

$$H(\xi, x, \zeta, \nu, t) = E^P \left[\int_t^{T_0} \Pi(v; t, x)^2 E(v; t, x) \frac{\partial I_1}{\partial u} \left(\hat{\lambda} \xi \nu \Pi(v; t, x) E(v; t, x), v \right) dv \right].$$

$$G(\xi, x, \zeta, \nu, t) = E^P \left[\Pi(T_0; t, x)^2 \Delta(T_0; t, x) \frac{dI_2}{du} \left(\hat{\lambda} \xi \zeta \Pi(T_0; t, x) \zeta \Delta(T_0; t, x) \right) \right].$$

$i = 1, \cdots, n$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_i(\xi, x, \zeta, \nu, t) &= \xi E^P \left[\int_t^{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(v; t, x) I_1 \left(\hat{\lambda} \xi \nu \Pi(v; t, x) E(v; t, x), v \right) dv + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(T_0; t, x) I_2 \left(\hat{\lambda} \xi \zeta \Pi(T_0; t, x) \Delta(T_0; t, x) \right) \right] \\
&+ \hat{\lambda} \xi^2 \nu E^P \left[\int_t^{T_0} \Pi(v; t, x) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(v; t, x) E(v; t, x) + \Pi(v; t, x) \frac{\partial E}{\partial x_i}(v; t, x) \right) \frac{\partial I_1}{\partial u} (\hat{\lambda} \xi \nu \Pi(v; t, x) E(v; t, x), v) dv \right] \\
&+ \hat{\lambda} \xi^2 \zeta E^P \left[\Pi(T_0; t, x) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(T_0; t, x) \Delta(T_0; t, x) + \Pi(T_0; t, x) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}(T_0; t, x) \right) \frac{dI_2}{du} (\hat{\lambda} \xi \zeta \Pi(T_0; t, x) \Delta(T_0; t, x)) \right].
\end{aligned}$$

次の定理が成立する.

定理： 効用函数の regularity 等に関する条件 ((**U1**),(**U2**)), 係数函数に対する regularity および市場の完備性に関する条件 ((**S1**),(**S2**),(**S3**),(**S4**), (**S5**),(**S6**),(**S7**)), 確率過程の可積分性条件 ((**A1**),(**A2**)), 初期の富に関する条件 (Assumption1.4.1) を仮定する (各条件は本論文 1.4 で与えた). このとき，多期間最適ポートフォリオ問題

$$J(W_0, x_0) = \sup_{(C,Z,\varphi) \in \mathcal{A}(W_0)} V(C, W^{W_0,C,\varphi}(T_0)),$$

に対して最適ポートフォリオ戦略 $\hat{\varphi}(t)$ が存在する. $\hat{\varphi}(t)$ は次のようなフィードバック・コントロール解として与えられる:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\Pi(t)} \right) (\sigma(t, X(t))^*)^{-1} \lambda(t, X(t)) \\
&\quad - \hat{\lambda} \frac{\Pi(t) E(t)}{W(t)} H(\Pi(t), X(t), \Delta(t), E(t), t) (\sigma(t, X(t))^*)^{-1} (\lambda(t, X(t)) - h(t, X(t))) \\
&\quad - \hat{\lambda} \frac{\Pi(t) \Delta(t)}{W(t)} G(\Pi(t), X(t), \Delta(t), E(t), t) (\sigma(t, X(t))^*)^{-1} (\lambda(t, X(t)) - g(t, X(t))) \\
&\quad + \frac{1}{W(t)} \frac{1}{\Pi(t)} (\sigma(t, X(t))^*)^{-1} (\sigma^X(t, X(t))^*) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(\Pi(t), X(t), \Delta(t), E(t), t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_n(\Pi(t), X(t), \Delta(t), E(t), t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

定理： 投資家の効用函数が次のような HARA 型であると仮定する.

$$U_0(w) = \frac{(w - w_0)^{1-\gamma}}{1 - \gamma}, \quad u_0(w, t) = \beta \frac{(w - c_0)^{1-\gamma}}{1 - \gamma},$$

但し，$0 < \gamma \leqslant 1$ は共通であり，$\beta > 0$ とする. $\gamma = 1$ の場合は対数型効用函数と解釈する. このとき，次の条件が成立するならば，可積分性条件 (**A1**),(**A2**) が成立する：任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\sup_{x \in K} \sup_{t \in [0, T_0]} E^P \left[\Pi(t; 0, x)^p \right] < \infty, \quad \sup_{x \in K} \sup_{t \in [0, T_0]} E^P \left[E(t; 0, x)^p \right] < \infty, \quad \sup_{x \in K} \sup_{t \in [0, T_0]} E^P \left[\Delta(t; 0, x)^p \right] < \infty.$$