論文審査の結果の要旨

氏名　深谷 竜司

本論文は最適ポートフォリオ戦略に関して研究したものである。最適ポートフォリオ戦略の研究は 1970 年頃の Merton による結果が出て以降多くの研究が現れている。本論文では証券価格や短期金利の確率微分方程式の係数が，確率微分方程式で与えられる拡散過程の函数として与えられる完備な金融資本市場を考え，最適ポートフォリオ戦略がフィードバック・コントロール解として求めるための十分条件を考察している。

本論文の大きな特徴は、最適ポートフォリオ戦略をモンテカルロ・シミュレーション等で計算するために確率的流れを応用した新しい公式を与えている所にある。考察対象とする投資家の効用函数に経済状態に依存する要素を加えており，従来研究されてきた多期間最適ポートフォリオ問題の一般化も行っている。また、効用函数が HARA 型で一定の条件を満たすとき，チェックしやすい十分条件を与えた。

以下，本論文の内容を特別な場合に限り説明する。現れる関数はすべて適当な滑らかさと増大度を持つものとする。$X(t,s,x)$, $0 \le s \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}^n$, を次の位置パラメータ付き伊藤型確率微分方程式の解であるとする。

$$X(t;s,x) = x + \int_s^t \mu^X(v, X(v;s,x))dv + \int_s^t \sigma^X(v, X(v;s,x))dB(v).$$

さらに、$x_0 \in \mathbf{R}^n$ を固定し、経済状態を表す確率変数 $X(t)$ は $X(t) = X(t,x_0)$ で与えられるものとする。時間 t における短期金利を $r_t = r(t, X(t))$ で定める。d 個の証券価格を $S_i(t)$, $i = 1, \cdots, d$, とする。但し $S_i(t)$ は確率過程で次の確率微分方程式の一意的な解とする。

$$S_i(t) = S_{i,0} + \int_0^t \mu_i(v, X(v))S_i(v)dv + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j}(v, X(v))S_i(v)dB_j(v).$$

$\Pi(t;s,x)$, $0 \le s \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}^n$, は対応する状態価格デフレーターとし、$\Delta(t;s,x)$, $E(t;s,x)$, $0 \le s \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}^n$, は乗法的汎関数とする。

$w_0 \ge 0$，$c_0 \ge 0$ とし、$U_0 : (w_0, \infty) \to \mathbf{R}$，$u_0 : (c_0, \infty) \times [0, T_0] \to \mathbf{R}$ は適当な条件を持つ関数、$I_1 : (0,\infty) \times [0, T_0] \to (c_0, \infty)$ および I_2 :

$(0,\infty) \to (w_0,\infty)$ をそれぞれ $\partial u_0/\partial w$, U_0' の逆函数とする。状態に依存する函数 $U:(w_0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$ および $u:(c_0,\infty)\times[0,T_0]\times\Omega\to\mathbf{R}$ を次で定める。

$$U(w,\omega)=\frac{U_0(w)}{\Delta(T_0)},\quad u(w,t,\omega)=\frac{u_0(w,t)}{E(t)}.$$

以上の設定のもと，状態に依存する効用函数 V を次式で定義する。

$$V(C,Z)=E^P\left[\int_0^{T_0}u(C(v),v,\omega)dv+U(Z,\omega)\right].$$

この効用関数を最大にする許容されたポートフォリオ戦略を求めることが目的である。

本論文では、先ず Theorem 2。2。1 で、ある適当な条件の下、最適ポートフォリオ戦略が存在し、それが $\Pi(t;s,x)$, $\Delta(t;s,x)$, $E(t;s,x)$, $X(t;s,x)$ $0\le s\le t\le T$, $x\in\mathbf{R}^n$, 及びそれらの x に関する微分を用いて表現できることを示した（式は非常に長いので省略する)。

つぎに関数 U,u が次のような HARA 型である場合を考察した。

$$U_0(w)=\frac{(w-w_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma},\quad u_0(w,t)=\beta\frac{(w-c_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

但し，$0<\gamma\le 1$, $\beta>0$。($\gamma=1$ の場合は対数型効用函数と解釈する)。このとき，Theorem 2。5。3, 2。5。4 において、ある適当な条件の下で、最適ポートフォリオ戦略は連続過程となり、それが計算実行可能な公式で表現できることを示した。

第 2 章の最後ではこれらの結果に基づき株式–債券-キャッシュ配分問題を考察して最適ポートフォリオ戦略の数値計算を実行している。第 3 章では日本債券市場における最適ポートフォリオ戦略を具体的に考察している。

このような一般的な条件の下で数値計算が実行可能な公式を与えたのは初めてであり、本論文は最適ポートフォリオ戦略と数値計算について新しい方向性を生み出したものとして高く評価できるものである。

よって、論文提出者 深谷 竜司は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。