論文の内容の要旨

論文題目
Some Results Concerning Statistical Inference for Mixing Processes
(ミキシング性をもつ確率過程に対する統計推測に関する幾つかの結果)

増田 弘毅

本論文は3つの章から成り, ミキシング性をもつある種の確率過程モデルに絡んだ統計的漸近推測に関するいくつかの結果を提示する. 興味の対象は, レヴィ過程によって駆動されるミキシング過程, およびそれを潜在過程として記述する連続時間の一種の状態空間モデルであり, 特に一般のレヴィ過程で駆動されるオルンシュタイン-ウーレンベック型のマルコフ過程 (以下 OU 過程と略す) を主対象 (第1,3章), または例 (第2章) として扱った. d 次元 OU 過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ は線形確率微分方程式

$$dX_t = -QX_t dt + dZ_t$$

で記述される特殊な確率過程であり, その解は明示的に

$$X_t = e^{-Qt}X_0 + \int_0^t e^{-(t-s)Q}dZ_s$$

によって与えられる. ここで $Q \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, $Z=(Z_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ は d 次元レヴィ過程である. OU 過程は, レヴィ過程で駆動される他の確率微分方程式の解とは共有され得ない多くの固有の性質を持つことが知られている.

まず第1章において, 一般の d 次元レヴィ過程 $Z=(Z_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ で駆動される d 次元 OU 過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ が以下の性質を持つ為の十分条件を, 検証し易い形で与えた:

(OU1) 強フェラー性をもつ;

(OU2) 滑らかな遷移密度関数をもつ;

(OU3) 特に X が定常な場合, 指数的 β-ミキシング性をもつ.

本論文において重要となるのが (OU3) の指数的 β-ミキシング性であり, これは続く 2 つの章において具体的に統計へ応用される. (OU3) は, 本論文に限らず, OU 過程から成る統計モデルに対する推測を行うの為の 1 つの重要な一般的な道具となる. (OU1) と (OU2) は本論文では特には応用されないが, 確率過程論においては重要な概念である. 特に OU 過程の固有の遷移構造により, これら 2 つの性質の為の十分条件は Z の生成要素の観点から簡単な形で与えることができる. Kwon and Lee (1999, Stochastics Stochastics Rep.) により, 一般のジャンプ付き拡散過程の強フェラー性の為の十分条件が導出されたが, そこでは拡散係数の非退化性が不可欠であった. 対象を OU 過程に制限する場合, 本章の結果によって, 拡散係数が退化した場合においても Z のレヴィ測度が発散し, かつ密度をもてば強フェラー性を示せる. また滑らかな遷移密度関数の存在に関しても, よく知られたマリアヴァン解析を用いるまでもなく, Z の生成用素だけで簡単に十分条件を記述できることを確認した.

また, 非正規型 OU 過程の例として, OU 過程のあらゆる不変分布は作用素型自己分解可能分布と 1 対 1 に対応するという既存の結果を踏まえ, 歪みのない多次元一般化双曲型分布 (GH 分布) の作用素型自己分解可能性を示した上で, GH 分布を不変分布としてもつような具体的な OU 過程を構成した. GH 分布は近年様々な分野で応用されている分布であり, 多次元非正規分布の一つの標準的なものといえよう. 更に既存の 1 次元の結果を拡張して, 多次元 GH 分布のレヴィ密度関数の陽な表示も与えた.

続く第 2 章において, 部分的かつ離散的にしか観測されないような確率過程モデルの一つのクラス (X,Y,L) に対して, 古典的なモーメント推定を行うことを考えた (この章の結果は筆者の修士論文の結果の拡張である). ここで L は r 次元のレヴィ過程, X は観測されない, 即ち直接的にデータを得ることができない潜在過程, Y は $\Delta > 0$ を定数として離散的な $n+1$ 個の時刻 $\{k\Delta : k = 0,1,\dots,n\}$ においてのみ観測される確率過程を記述している. モデル (X,Y,L) が未知母数 $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$ を含んでいるとし, データ $\{Y_{k\Delta} : k = 0,1,\dots,n\}$ から θ を推定したいという状況を考える. これは隠れマルコフモデルにおける推定問題に直接結び付き, 一般に推奨される最尤推定法は理論的に困難であることが知られている. 仮に最尤法が実行可能であるとしても, 尤度関数が一般に複雑な形になる為, 推定値の算出における計算量コストなどの更なる問題が生じる. モーメント法は, 最尤法よりも一般に推定精度は劣るものの, 推定値を算出し易いなどの利点をもつ. 本章ではこのモーメント法を実行できるような (X,Y) の構造を以下のように与えた:

(AX) $X = (X_t)_{t \geq -\epsilon}$ は d_1 次元の càdlàg な ϵ マルコフ過程で, L で駆動されるものであるとする. ここで初期過程 $X^0 = (X^0_t)_{t \in [-\epsilon,0]}$ は L と独立な d_1 次元の càdlàg な確率過程であり, 更に X は強定常で強ミキシング性を持つ.

(AY) $Y = (Y_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ は d_2 次元の càdlàg な確率過程で, 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して $Y_{k\Delta} - Y_{(k-1)\Delta}$ は $\mathcal{B}^{X,dL}_{[(k-1)\Delta,k\Delta]}$-可測になる. ここで $\mathcal{B}^{X,dL}_{[(k-1)\Delta,k\Delta]} = \sigma(X_s, L_t - L_s : (k-1)\Delta \leq s,t \leq k\Delta)$ である.

更に重要な仮定として, 不可避的なモーメント条件の他, ミキシング過程に対する中心極限定理を適用する為に, X のミキシング係数 $\alpha_X(t)$ に関して, ある定数 $\delta > 0$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha_X(k)\}^{\delta/(\delta+2)} < \infty$ となることを仮定する. Y が確率微分方程式で記述される場合, Y の一つの自然な形は

$$dY_t = V_Y(X_t,\theta)dL_t$$

である. 実際, 本章では (X,Y) が確率微分方程式で記述される状況を主として扱い, その上で, キュムラント母関数に基づいて推定方程式を系統的に導出する手段

を与えた. 数値例を幾つか与え, 推定量の収束の状況を確認したが, そこでは具体的な X として OU 過程を対象とした (ここで第 1 章の結果が応用される). ここで非正規型の L としては, 逆正規分布および normal inverse Gaussian 分布に対応するレヴィ過程を扱った. OU 過程は $\epsilon = 0$ の場合であるが, より一般の $\epsilon > 0$ の場合に関しては, 遅延を持つ一種の線形拡散過程を本内容の枠組みに入る例として紹介するに留め, 詳しくは扱わなかった.

最後の第 3 章は, 現在投稿中である, 吉田朋広教授との共同内容に基づいている. 本章では以下の特別な 2 次元マルコフモデル (X, Y) を扱う:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= -\lambda X_t dt + dZ_t, \\
dY_t &= (\gamma + \beta X_t)dt + \theta\sqrt{X_t}dw_t + \rho dZ_t, \qquad Y_0 = 0,
\end{aligned}
$$

ここで Z, w は互いに独立なレヴィ過程, ウィーナー過程を表す. 本章の目的は期待値 $E[f(T^{-1/2}H_T)]$ の $T \to \infty$ の時の形式的エッジワースの正当性を導くことにある. ここで $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は高々多項式オーダーで増加する可測関数であり, また $H_T = Y_T - E[Y_T]$ である. 以下の 2 つの場合を扱った:

(Case A) $\theta \neq 0$ かつ Z は従属化過程 (単調増加レヴィ過程);

(Case B) $\theta = 0$, $\beta \neq 0$ かつ $\rho\lambda + \beta \neq 0$.

$\theta = \beta = 0$ の場合は, Y 自身がレヴィ過程になってしまうので興味の対象から外した. Case A,B 共に X は強定常であり, その不変分布は任意の次数のモーメントをもつと仮定する.

Case A は Barndorff-Nielsen & Shephard の確率的ボラティリティ変動モデルであり, 近年ファイナンスにおいてその有用性が実証された. このモデルは "Aggregational Gaussianity" と呼ばれる, ファイナンスなどの分野において実際に観察される重要なデータの性質を解析的に表現できることが分かっている. これはよく知られた, 長期期間におけるブラック-ショールズモデルの有用性と結びつくものである. Aggregational Gaussianity はマルチンゲール中心極限定理で記述されるが, 本章で得られた漸近展開を介して Aggregational Gaussianity を精密化することができる. これにより, ファイナンスにおいて実際に観測される, 短期期間の資産収益の分布の強い非正規性, 長期期間の対数資産収益の分布の (近似的な) 正規性を統一的に表現する展開公式が得られたことになる. Case A における更なる正則条件として, ある空でない開集合 $B \subset \mathbf{R}_+$ が存在し, その上で Z のレヴィ測度の一部が C^3 級の正の密度関数を持つということを仮定する.

Case B においては Y の拡散係数 $\sqrt{X_t}$ が消える為, Z は従属化過程でなくてもよい (X は $\mathbf{R}$ に値をとるものでもよい). 特に $\beta = 1$ かつ $\rho = 0$ の場合, 本章の結果は潜在 OU 過程 X の不変分布の自然な位置推定量 $T^{-1}\int_0^T X_s ds$ の分布の漸近展開を与える. パラメーターに関する制限 $\rho\lambda + \beta \neq 0$ は $T^{-1/2}H_T$ の漸近正規分布の非退化性の為に必要となる. Case B においては, Z の正規分散が正であるか, または Case A と同様の, Z のレヴィ測度に関する条件がみたされることを仮定する.

Case A,B に共通して, エッジワース展開の正当性の証明は, 近年 Yoshida (2001, preprint) において (または Kusuoka and Yoshida (2000, Probab. Theory and Related Fields) において) 展開された, ミキシング過程に対するエッジワース展開の一般論を援用してなされる. その際に本質的となる道具は剪定を伴うマリアヴァン解析であり, 汎関数の分布の局所非退化性を部分積分の公式によって証明することで, エッジワース展開において本質的となる特性関数の減衰を導出する. ここで用いるマリアヴァン解析は Bichteler, Gravereaux & Jacod (1987, Gordon and Breach Science Publishers) によって定式化された, ウィーナー・ポアソン空間上のマリアヴァン解析を指す. それを用いる際に要求される正則条件は, 特に Case A の場合には導関数が原点で非正則になる Y の拡散係数 $\sqrt{X_t}$ の影響で直接的にはみたされないが, 剪定関数を上手く設定することで X が原点の適当な近傍には到達しないような都合の良い事象のみを対象として考えることができ, この不都合を回避することが可能となる. Yoshida (2001, preprint) の議論の適用の際に不可欠である OU 過程 X の (指数的) ミキシング性は, 第 1 章の結果によって保証される.

Case A,B の両方に共通していえる重要な事として, エッジワース展開の係数が任意の次数まで初等的な関数のみで陽に書き下せるという点がある. これは OU 過程の固有の性質が本質的に作用している. エッジワース展開の正当性自体は, より一般の確率微分方程式に対して導出可能であるが, 展開の係数を計算機などを用いた数値的な手法に頼ることなく陽に書き下したいという立場に立つと, 上記のモデルまで制限することは自然であり, 実際本章のモデル設定はその立場に立った上で成されたものである.

以上