論文の内容の要旨

論文題目

Studies on Periodic Box-Ball Systems

（周期箱玉系の研究）

氏　名　　間　田　　潤

1　はじめに

本論文は、「周期箱玉系」に関する研究を行い、そこで得られた成果についてまとめたものである。

箱玉系は、高橋・薩摩の提案したソリトン・セルオートマトンを、１次元的に並んだ箱の中を動く玉のなす力学系として表現したものであり、代表的な非線形可積分方程式系である KdV 方程式および戸田方程式を超離散化したものになっている。また、その時間発展パターンは、量子代数 $U_q(A^{(1)}_M)$ の対称性を持つ可解格子模型のいわゆる結晶化（crystallization）に一致している。このような無限次元可積分系との関係から、箱玉系は「可積分な」セルオートマトンと呼ばれている。

周期箱玉系は、この箱玉系に周期条件を課して有限なオートマトンとしたものである。もとの箱玉系と同様、周期戸田格子系を超離散化した非線形離散方程式系であり、また、周期可解格子模型の結晶化でもある。しかしながら、もともとの箱玉系とのひとつの際立った違いは、周期箱玉系が、「有限の状態しかとらない可逆な系」であることである。したがって、力学系としての位相空間は有限集合であり、すべての軌道は有限な周期軌道となる。そのため、必ず初期状態と同じ状態に戻ることになり、与えられた初期状態に対して元に戻るまでの最小の周期（以下、「基本周期」と呼ぶことにする）が存在する。一般の非線形な力学系において、任意の初期状態に対して、その基本周期を計算することはきわめて困難であるが、周期箱玉系では、ある種の繰り込み操作が可能であるため、基本周期を求めるアルゴリズムが存在することが吉原らによって示されていた。そこで私は、エルゴード力学系やカオス力学系と対置する意味で、周期箱玉系の「力学系としての可積分性」を、基本周期の観点、すなわち各軌道が位相空間のどの程度を占めるかという観点から研究した。

2　周期箱玉系の基本周期の漸近挙動

系の基本周期の熱力学的極限（系のサイズ N を無限大にした極限）における漸近的挙動の考察を行い、基本周期の最大値と一般の初期状態に対する基本周期についての評価を得た。系の位相空間の体積は系のサイズに対して指数関数的に増大する。「可積分系」であれば、基本周期のふるまいは定性的に異なるはずであり、それを肯定する結果が得られた。簡単にまとめると次の通りである。

定理 1： 箱の数:N, 玉の数:M とし、密度:$\rho := M/N$ $(0 < \rho < 1/2)$ とする。このとき、基本周期の最大値 $T_{\max}(N;\rho)$ は、$N \geq 10^{16}$ とすると

$$\exp\left[2\left(1-\max\left[\sqrt{2-4\rho}-1, 0\right]\right)\sqrt{N}\left(1-\frac{c}{\log N}\right)\right] < T_{\max}(N;\rho) < \exp\left[2\sqrt{2\rho}\sqrt{N}\log N\right]$$

が成立する。ここで c は、$c \sim 0.1$ である正定数である。 □

定理の証明は、吉原らのアルゴリズムに基づく。このアルゴリズムは、系の保存量から順次定義される正整数列を構成し、基本周期がそれらの最小公倍数で与えられるとするものである。定理の下限は、基本周期の最大値を与えると考えられる初期状態を近似的に構成し、素数定理を利用して証明した。上限は、正整数列を上から評価して証明した。

箱と玉の数を定めたとき、位相空間の体積 $V(N;\rho)$ は

$$V(N;\rho) = \binom{N}{M} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(1-\rho)N}}\left((1-\rho)^{\rho-1}\rho^{-\rho}\right)^N$$

で与えられる。したがって、基本周期の最大値が漸近的に $\exp[\sqrt{N}]$ 程度の増大をするのに対し、位相空間の体積は $\exp[N]$ 程度である。系が非常に大きいときには、軌道が位相空間内のほとんどの状態を通らないという意味で、周期箱玉系はエルゴード力学系とは非常に異なるといえる。

定理 2： N, ρ, $V(N;\rho)$ を前述のもの、$t_0 := \rho/(1+\rho)$ とする。与えられた正数 δ に対して、$\bar{V}_\delta(N;\rho)$ を、基本周期が $\exp\left[\dfrac{(1+\delta)(\log N)^2}{-\log t_0}\right]$ よりも小さくなるような初期状態の数と定義する。このとき、任意の $\delta > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\bar{V}_\delta(N;\rho)}{V(N;\rho)} = 1$$

が成り立つ。 □

証明には、保存量に対する母関数を導入し、保存量と基本周期との関係を用いた。漸近形の評価は、分割数に関するロジャーズ-ラマヌジャンの漸近評価と同様な解析数論の手法（基本的には鞍点法）によった。

この定理 2 から更に、系が十分に大きいとき、ほとんどの初期状態の基本周期が $\exp\left[\dfrac{(\log N)^2}{-\log t_0}\right]$ よりも小さくなることがいえる。

まとめ：
- ∘ 周期箱玉系の最大周期は $\sim \exp[\sqrt{N}]$ で増大する。
- ∘ ほとんどの初期状態に対する基本周期は $\lesssim \exp[(\log N)^2]$ 程度で抑えられる。
- ∘ 周期箱玉系のほとんどの軌道は、位相空間（体積 $(\sim \exp[N])$）のごく一部しか通らない。

という結果を得た。

さらに、考察過程において、T の漸近評価と Riemann 予想とが等価であること、フェルミオン公式との関係、テータ函数の周期行列などといった、他の重要事項との関係を見出すことが出来た。

3 一般化された周期箱玉系の保存量の ndKP 方程式からの構成

一般化された周期箱玉系（箱の数:N, 玉の種類:M, 箱の容量:θ_n）の基本周期についても同様の議論を行いたいが、現段階で基本周期を与える明示公式は得られていない。そこで、その手がかりとなるであろう保存量の考察を行った。まず、一般化された周期箱玉系の方程式

$$u_n^s - \kappa_n^{s-1} = \alpha - \max[0, \widetilde{\alpha}]$$

ただし

$$\begin{aligned}
\alpha &= \max\left[u_{n-1}^{s-M} - \kappa_n^{s-1}, u_{n-1}^{s-M} + u_{n-2}^{s-M} - \kappa_n^{s-1} - \kappa_{n-1}^{s-1}, \cdots, \sum_{j=1}^{N} u_{n-j}^{s-M} - \kappa_{n+1-j}^{s-1}\right] \\
\widetilde{\alpha} &= \max\left[u_{n-1}^{s-M} - \kappa_n^{s-1}, u_{n-1}^{s-M} + u_{n-2}^{s-M} - \kappa_n^{s-1} - \kappa_{n-1}^{s-1}, \cdots, \sum_{j=1}^{N-1} u_{n-j}^{s-M} - \kappa_{n+1-j}^{s-1}\right]
\end{aligned}$$

を得た（u_n^s は玉の数、κ_n^s は箱の空き容量に関する量を示す）。

そして、この方程式が ndKP 方程式（nonautonomous discrete KP equation）

$$(b_m - c_n)\tau_l\tau_{mn} + (c_n - a_l)\tau_m\tau_{nl} + (a_l - b_m)\tau_n\tau_{lm} = 0$$

に reduction 条件を課して得られる

$$\frac{1}{A_{n+1}^{s-1}} - \frac{1+\delta_{n+1}}{C_n^{s-1}} = -\frac{\delta_{n+1}}{B_n^s}$$

$$\left(A_n^s = \frac{\sigma_n^{s+M+1}\sigma_n^s}{\sigma_n^{s+M}\sigma_n^{s+1}} \ , \ B_n^s = \frac{\sigma_n^s\sigma_{n+1}^{s+M}}{\sigma_n^{s+M}\sigma_{n+1}^s} \ , \ C_n^s = \frac{\sigma_{n+1}^s\sigma_n^{s+1}}{\sigma_n^s\sigma_{n+1}^{s+1}} \right)$$

に周期境界条件を課して超離散極限をとることで導き出されることを示した。

これにより ndKP 方程式における Lax 形式

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(n;s)\varphi_n^s &:= \left[-\frac{\delta}{B_{n-1}^s} + (1+\delta)D_n^{-1}\right]\varphi_n^s = \Lambda\varphi_n^{s+M} \\
\widetilde{M}(n;s)\varphi_n^{s+1} &:= \left[\frac{1+\delta}{C_{n-1}^s} - (1+\delta)D_n^{-1}\right]\varphi_n^{s+1} = \varphi_n^s
\end{aligned}$$

$$\left(D_n\varphi_n^s = \varphi_{n+1}^s\right)$$

から保存量を求め、それらの超極限をとることにより周期箱玉系の保存量が得られる。

そして、実際に $M=1$ で具体的な保存量を求め、特に、箱の容量が 1 のときには、既に知られている保存量に一致することを示した。

4 まとめ

周期箱玉系の可積分性を特徴付けるという目標に向け、その手段として周期箱玉系の基本周期に着目した。箱の容量 1，玉の種類 1 の場合における周期箱玉系の基本周期の漸近挙動の研究からは、周期箱玉系の基本周期は、位相空間の体積からすると非常に小さいという結果が得られた。また、一般化された周期箱玉系においては、周期箱玉系と ndKP 方程式との対応関係を示し、そこから任意の M（玉の種類）に対して、周期箱玉系に対応する ndKP 方程式の Lax 行列を得た。さらに、$M=1$ では、箱の容量が 1 のとき、既に知られている保存量に一致することを示した。