論文審査の結果報告

氏　名　　間田　潤

周期箱玉系とは，周期的な1次元的に並んだ箱の中を動く玉のなす力学系で，セルオートマトンの1例である．この系は，戸田格子系から超離散極限によって得られ，また，$A_n^{(1)}$ 型可解格子模型の結晶化に対応し，十分な数の保存量の存在や組み合わせ論的 R 行列との関係から「可積分性」をもつと考えられている．また，この系は，有限個の状態しかとらない可逆な力学系であるので，その軌道はすべて周期軌道となり，与えられた初期状態に対して最小の周期（基本周期）が存在する．本論文は二つの部分からなり，前半は周期箱玉系の基本周期の漸近的な性質を明らかにしたものであり，後半は，一般化された周期箱玉系について non-autonomous discrete KP (ndKP) 方程式からの超離散極限を利用してその保存量を求めるアルゴリズムを構成したものである．

間田氏は，Yoshihara らによって得られた基本周期公式を利用して基本周期の系のサイズが無限大に発散する場合の漸近的性質を調べた．この公式によれば，基本周期は系の保存量を定めるヤング図形から導かれる有限数列の最小公倍数として与えられる．氏は，まず，すべての初期状態に対する基本周期の最大値 ($T_{\max}$) の漸近評価として $2\sqrt{N}+O(1) < \log T_{\max} < 2\sqrt{N}\log N$ を証明した．ここで，上限はヤング図形の分布の考察から，下限は準三角的なヤング図形に対する有限数列の構成と素数定理に基づく評価式から得ている．さらに，この下限の評価式を与える定理の系として，準三角的なヤング図形に対応する保存量をもつ状態の基本周期の漸近評価を与えることと，有名な Riemann 予想の証明とが等価であることを示した．これは，周期箱玉系の基本周期と素数分布の問題が密接に関係しているためであり，可積分系と整数論との関係を示す一つの良い結果である．さらに，氏はほとんどの基本周期は $\log T < N\log N$ を満たすことを，深さの決まったヤング図形を与える初期値分布関数の母関数を求め，古典的な解析数論の手法（本質的には鞍点法）により母関数の漸近形を評価することにより証明した．この結果，系が非常に大きいときには，軌道が位相空間内のわずかな状態しか通らないという意味で周期箱玉系は力学系としてのエルゴード性をもたないことが示されたことになる．非自明な力学系において基本周期を求める問題は通常大変困難な問題であり，このようにその漸近評価を厳密に行った例はほとんどなく，離散力学系の観点からも高く評価できるものである．

次に氏は，拡張された周期箱玉系（玉の種類 M，箱 n の容量 θ_n が任意のもの）を考察し，系の時間発展方程式を区分線形方程式で陽に書き表した．そしてこの方程式が ndKP 方程式に $M+1$-reduction と周期境界条件を課した離散可積分方程式の超離散極限であることを証明した．この結果と，ndKP 方程式の Lax 形式

を利用し，Lax 演算子の固有値が時間的に不変であることを用いて，周期箱玉系の保存量を求めるアルゴリズムを構成した．さらに $M = 1$ の場合には，その保存量を具体的に書き下し，その保存量を 2 種類の玉を用いた組合せ論的な表現によって表示することで，$\theta_n = 1$ のばあいには，すでに知られているヤング図形を用いた保存量に一致することを証明した．以上の成果によって，一般化された箱玉系の基本周期を決定する手がかりが与えられたことになる．

以上のように本論文は，可積分セルオートマトンの数理構造に新しい知見を与え，また，可積分系の数論的側面を発見したものでもあり，今後の可積分系理論の発展に良い材料を提供したものと考えられる．論文全体を通して，複雑な計算を実行して明快な結果を得る計算力や，初等的ではあるものの独創的な証明のアイデアが見て取られる．また，論文の記述も明快である．よって，論文提出者 間田 潤 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．