論文の内容の要旨

論文題目　ON CONNECTING ORBITS OF SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS ON S^1
（S^1 上の半線形放物型方程式のヘテロクリニック軌道について）

氏　　名　宮本　安人

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の関数空間 $X = C^1(S^1)$ 内における，次の半線形放物型方程式について考える．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), & x \in S^1, \\ u(x,0) = u_0(x) \in X, & x \in S^1. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，非線形項 f は次の 3 つの条件を満たすと仮定する．

(A1) 関数 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^3 級関数で，$f(\cdot, 0)$ は有限個の根を持つ．この根を r_j $(j = 1, 2, \cdots, N)$ とする．

(A2) ある定数 L が存在し，$|u| > L$ において $u \cdot f(u, 0) < 0$.

(A3) ある定数 L' が存在し，$|p| > L'$ において $f_u(u, p) \leq 0$.

このとき，任意の関数 $u_0(x) \in X$ を初期関数とする解は時間大域的に存在し，X 内の半群 Φ_t を生成することが知られている．また，X 内にグローバルアトラクターと呼ばれる極大で連結，コンパクトで半群 Φ_t に関して不変な集合が存在し，(1) のすべての解がこの集合に引き寄せられることが，半線形放物型方程式の一般論から直ちにわかる．さらに，すべての解は次の方程式

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} + c\frac{dU}{d\zeta} + f\left(U, \frac{dU}{d\zeta}\right) = 0,\ \zeta \in S^1, \tag{2}$$

を満たす $U(\zeta)$（$\zeta = x - ct$ ここで c は定数）の形の解に近づくことが俣野 [2] と Angenent-Fiedler[1] により示されている．ここで，(2) の解 $U(x - ct)$ は，$c = 0$ のとき定常解，$c \neq 0$ かつ定数解でないとき rotating wave と呼ばれる．以降，二つの解をまとめて波と呼ぶことにする．また，$U(\zeta)$ が (2) の解であるとき，$U(\zeta + \theta)$ $(\theta \in S^1)$ も解であるので，平行移動により解を同一視する．全ての波をこの同一視によって割った商集合を S と表すことにする．

グローバルアトラクターは rotating wave と定常解と，それらの波を繋ぐヘテロクリニック軌道と呼ばれる (1) の解（すなわち，$t \to -\infty$ では波 v に近づき，$t \to +\infty$ では別の波 w に近づくような軌道）の 3 種類の解からできている．従って，波の数 $\#S$ と各波の形（モード数）がわかっている場合，グローバルアトラクターの幾何的な構造を解析するためには，どの波とどの波がヘテロクリニック軌道で繋がっているか，また繋がっていないかを調べればよい．

本論文で以下のことが証明された．まず，すべての波の数 $\#S$ の下からの評価を得た（定理 A）．具体的には，

$$\#S \geq N + \sum_{j=1}^{N} \left[\left[\frac{\sqrt{(f_u(r_j,0))_+}}{2\pi} \right]\right]. \tag{3}$$

ここで，$[[y]] := -[-y]-1$，$[y]$ は y を超えない最大の整数，$(y)_+ := \max\{y, 0\}$．またすべての波が双曲的 (hyperbolic) で，各波のモース指数が奇数またはゼロならば，どの波とどの波がヘテロクリニック軌道で繋がっているか，または繋がっていないかを，完全に判定できることを示した（定理 B）．さらに，(3) で等式が成立する場合，各波のモース指数が奇数またはゼロになり，よって，定理 B の仮定を満たし定理 B の結論が成り立つことを示した（定理 C）．また，非線形項 f が u のみに依存する場合，定理 C の仮定が成り立つような，非線形項についての一つの十分条件を得た（定理 D）．最後に，後述のように，各波の位置関係とモース指数には密接な関係があることを示した（補助定理 E）．

証明の鍵となったのは，次に述べる波の間の順序関係の存在である．波 $u(x,t) = U(\zeta)$ について，U の値域を $R(u)$ とする．このとき，次のような順序関係を入れる．

$$u \rhd v \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad R(u) \supset R(v)$$

$R(u) \cap R(v) \neq \emptyset$ ならば，必ず $R(u) \supset R(v)$ か $R(v) \supset R(u)$ であることが示されるので（俣野-中村 [3] や本論文の補助定理 4.1），$u \rhd v$ か $v \rhd u$ となる．従って S は半順序構造を持つ．この半順序構造から，波のモード数と 2 つの波の差のゼロ点（後述）を決定することができる．

まず 2 つとも定数解でない波 u と波 v が上記で定義された順序 $\rhd$ で隣接しているとき，すなわち，$u \rhd w \rhd v$ となる w が存在しないとき，その 2 つの波のモード数の差の絶対値が 0 または 2 であることを示した．この事実と [1] の結果を用いると，任意の隣接する 2 つの波の一般化されたモース指数（通常のモース指数以上の整数で最小の偶数）の差の絶対値も 0 または 2 であることがわかる．次に，[1] や [3] から波 u と波 v が定数でないならば，$u \rhd v$ のときに $z(u-v) = z(u_x)$ であることがわかる．ここで，$z(u)$ は次のように定義される関数のゼロ点の数である．

$$z(u(\cdot,t)) = \#\{x \in S^1 |\ u(x,t) = 0\},$$

この $u-v$ のゼロ点の数と，u と v のモース指数の情報から，ゼロ点の非増大法則と [1] の結果を用いて，ヘテロクリニック軌道が存在するかどうかを決定した．

参考文献

[1] S. B. ANGENENT and B. FIEDLER, *The Dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **307**(1988), 545-568.

[2] H. MATANO, *Asymptotic behavior of solutions of semilinear heat equations on S^1*, "Nonlinear differential equations and their equilibrium states", II (W.-M. Ni, L. A. Peletier and J. Serrin, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 13, Springer, New York 1988, pp. 139-162.

[3] H, MATANO and K. NAKAMURA, *The grobal attractor of semilinear parabolic equations on S^1*, Discrete Contin. Dynam. Systems **3**(1997), no. 1, 1-24.