論文審査の結果の要旨

氏 名 宮本 安人

論文提出者 宮本 安人は，一次元有界区間上の周期境界条件下における半線形放物型方程式を考察し，方程式が定める力学系の大域アトラクターを構成している解のうち，定常解または回転波解を結ぶヘテロクリニック軌道の存在・非存在を，条件付ながら完全に決定した．

論文提出者が考察したのは，$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の次の半線形放物型方程式である．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \quad x \in S^1,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \in X \end{cases} \tag{1}$$

ここで，非線形項 f は次の 3 つの条件を満たすとする．

(A1) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は実解析的関数で，$f(\cdot, 0)$ は有限個の根を持つ．
(A2) ある定数 L が存在し，$|r| > L$ において $r \cdot f(r,0) < 0$．
(A3) ある定数 L' が存在し，$|p| > L'$ において $f_u(u,p) < 0$．

このとき，任意の関数 $u_0(x) \in X$ を初期関数とする解は時間大域的に存在し，X 内の半群 Φ_t を生成することが知られている．また，X 内に大域アトラクターと呼ばれる極大でコンパクト，半群 Φ_t に関して不変で連結な集合が存在し，(1) の全ての解が引き寄せられることが，半線形放物型方程式の一般論から直ちに分かる．さらに，すべての解は次の方程式

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} + c\frac{dU}{d\zeta} + f\left(U, \frac{dU}{d\zeta}\right) = 0,\ \zeta \in S^1 \tag{2}$$

を満たす $U(\zeta)$（$\zeta = x - ct$ ここで c は定数）の形の解に近づくことが俣野 (1988) と Angenent-Fiedler(1988) により示されている．ここで，(2) の解 $U(x-ct)$ は，$c = 0$ のとき定常解，$c \neq 0$ かつ定数解でないとき回転波解と呼ばれる．

一次元有界区間上の半線形放物型方程式のダイナミクスや大域アトラクターに関する研究は，1970 年代後半から盛んに研究されてきた．

以下の Dirichlet 問題 (3) と Neumann 問題 (4) の場合，大域アトラクターは定常解とヘテロクリニッ軌道のみからなることが一般論から分かり，周期境界条件 (1) の場合は，俣野-中村 (1997) により定常解と回

転波解とそれらを結ぶヘテロクリニック軌道のみからなることが示されているので，どの解とどの解がヘテロクリニック軌道で繋がっているかを調べることが重要となる．いくつかの基礎的な事実に関する結果や部分的な解決を経た後に，以下の二つのような結果にまとめられた．

まず，Brunovský-Fiedler(1989) は Dirichlet 境界条件下における次の放物型方程式のヘテロクリニック軌道の存在・非存在を次の意味で完全に決定した．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

すなわち，全ての定常解の $x = 0$ における微分係数と，その定常解のモード数のみから，どの定常解とどの定常解が繋がっているか，繋がっていないかを完全に判定することができる．

Fiedler-Rocha(1996) は Neumann 境界条件下における，以下のより一般の非線形項を持つ放物型方程式のヘテロクリニック軌道の存在・非存在を次の意味で完全に決定した．

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + f(x,u,u_x), \quad x \in (0,1) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ a(x) > c > 0, \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{4}$$

すなわち，$\{U_j(x)\}_{j=1}^N$ $(U_1(0) < U_2(0) < \cdots < U_N(0))$ を (4) の定常解の集合とする．数列 $(U_1(1), U_2(1), \cdots, U_N(1))$ を大きい順に並べ替える置換のみから，どの定常解とどの定常解が繋がっているか，繋がっていないかを完全に判定することができる．

Angenent-Fiedler(1988) は (1) の，回転波解または定常解を結ぶヘテロクリニック軌道が存在することを示した．しかし，全ての定常解と回転波解の形状（最大値・最小値とモード数）が分かっている場合に，どの解とどの解が繋がっているか，さらにこれらのヘテロクリニック軌道の存在・非存在を特徴付けるような上記の数列や置換のようなものが存在するか，という問題は未解決のままだった．

論文提出者は，定常解と回転波解の最大値と最小値に着目し，値域の包含関係による順序を導入し，この順序による各解の配列と，モード数の間にある法則を発見，証明し，これらの解が完全には自由な位置関係がとれないことを示した．この位置関係とモード数から，数列

の集合（以後ストラクチャーと呼ぶことにする）を定義し，各解のモース指数が奇数またはゼロであるならば，ストラクチャーによりどの解とどの解が繋がっているか否かを，完全に判定できることを示した．

鍵となる補題の証明中に次を示した．パラメーター c に依存する常微分方程式系 (5) が閉軌道を持つとき，それが c に連続的に依存する．

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\zeta} = V \\ \dfrac{dV}{d\zeta} = -cV - f(U,V) \end{cases} \tag{5}$$

ここで閉軌道の非退化性などは仮定されておらず，これ自身興味深い結果である．また，パラメーターに依存する相図を扱う問題に対して，新たな手法を提示したものとして技術的な面においても高く評価できる．

以上の諸点を考慮した結果, 論文提出者 宮本 安人 は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.