論文の内容の要旨

論文の題目　Inverse Problems of Determining Inhomogeneity in Elliptic Equations
(楕円型方程式における不均質性決定逆問題)

氏　　名　金 成煥

本論文において私は楕円型方程式に対して次の4つの逆問題を考察した。
（1）金属と半導体の接触に関する逆問題
（2）伝導率逆問題
（3）磁気共鳴電気インピーダンス・トモグラフィ
（4）電場探査

これらの逆問題は間接的な観測によって未知の物理的な性質や構造を決定する問題であり、現代科学、工学ならびに医学などの分野で重要な問題である。

（1）金属と半導体の接触に関する逆問題

すべての半導体素子には金属層との接触面があり、それは電子に対する障壁として働く。したがって、半導体素子の設計においては、金属と半導体の間の界面における状態を制御することはきわめて重要である。このために界面での接触抵抗を規定する接触面やそこでの物理的な性質を決定しなくてはならない。これがここで考察した第一の逆問題である。境界入力として、半導体が占めている領域 Ω の境界で電流密度 $g \neq 0$ を加える。このとき、対応する電位 u は次の楕円型方程式の境界値問題の解となる：

$$\begin{cases} -\Delta u + p\chi_D u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで p はある物理的な性質を記述するパラメータ、D は金属と半導体の接触面で χ_D は D の特性関数である。$\Lambda_D(g)$ によって接触面 D によって決まる境界での観測量 $u|_{\partial\Omega}$ を表すものとする。したがって、金属と半導体の

接触に関する逆問題は境界観測 $(g, \Lambda_D(g))$ による D の決定問題として定式化することができる。数学の観点から第一に考察されるべき問題は一意性である。すなわち、コーシー・データ $(g, \Lambda_D(g))$ が D を一意的に決定するかどうかを証明する問題がこれである。しかしながら、数学ならびに工学の領域でおびただしい研究がなされてきたにも関わらず、一般の凸領域 D に対して一意性は未解決問題である。本論文の第一の課題は一意性の問題に答えることである。

第1章において、次の一意性の結果を証明した:Ω の二つの部分領域 D_1, D_2 に対して、もし $D_1 \setminus \overline{D_2}$ ならびに $D_2 \setminus \overline{D_1}$ をともに分離する直線（または3次元の場合は平面）が存在すれば、デイリクレ境界データが一致するとき、すなわち $\Lambda_{D_1}(g) = \Lambda_{D_2}(g)$、ならば $D_1 = D_2$ を結論づけることができる。この結果の特別な場合として、D_1, D_2 が円板（3次元の場合は球）であれば、つねに一意性が成り立つことがわかる。

第2章において $D_1 \setminus \overline{D_2}$ 、または $D_2 \setminus \overline{D_1}$ の連結成分の個数が2以上のときに一意性を示した。実は第1章では連結成分の個数が1である場合を取り扱っていた。

第3章において、境界が滑らかでない部分領域に対して一意性の結果を証明した。すなわち、ラプラス方程式のコーシー問題の空間 H^1 における解の非存在の定理に基づいて、一般の多角形領域の凸包についての一意性を証明した。この証明では、楕円型方程式の H^1 での弱解の領域の”かどの点”における滑らかさが本質的である。そのためには D の境界が”かどの点”を持ちさえすればよいので、ここでの証明は多角形領域のみならず境界が曲線の場合にも適用できる。第4章において変数係数の楕円型方程式に対して D の境界が曲線の場合に”かどの点”を決定する際の一意性の結果を証明した。さらに”かどでの滑らかさ”の性質は他の逆問題にも適用できる。すなわち、第5章で等方的な定常ラメ方程式に対する類似の逆問題の一意性を考察した。

（2）伝導率逆問題

伝導率逆問題は電気インピーダンス・トモグラフィ（EIT）において現れ、人体表面の電場または磁場の観測値から医学診断を行うために有効性が期待できる新しい方法である。人体の胸郭部分の断面を $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ とする。電流を人体表面から横断する方向に加えると誘導される電位 u は次の2次元の伝導方程式を満たす：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega,$$

ただし、σ は人体の伝導率の分布を表している。代表的なモデルとして、次を仮定する: $\sigma(x) = \ell(x) + m(x)\chi_D(x)$。ただし、$\ell$、$m$ は既知の正値関数である。そのとき、表面 $\partial\Omega$ での電位 u の観測値から D を決定することがここ

で考察した問題である。

理論面ならびに応用面での重要性のために多くの研究者が、このような逆問題に取り組み、多角形領域 D の範囲内での一意性が証明されている。しかしながら、既存の論文においては係数 ℓ、m はともに正の定数でなくてはならなかった。それらの論文においては、関連した自由境界問題における解析性が本質的に用いられており、一般の変数係数の場合には適用できない。物理的な見地から ℓ、m が変数係数の場合に一意性を証明することはきわめて重要であり、第6章でそのような場合において、より一般的な仮定

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \sigma_k(x)\chi_{D_k}(x)$$

の下で一意性を確立した。

（3）磁気共鳴電気インピーダンス・トモグラフィ

人体の伝導率の分布を決定するために、伝導率逆問題においては境界データのみを使用したが、磁気共鳴電気インピーダンス・トモグラフィ（MREIT）においては、磁気共鳴画像（MRI）によって内部データを観測することが可能となる。そのとき、前述の伝導率逆問題は次の非線形 MREIT 方程式に書き換えることができる：

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{a}{|\nabla u|} \right) \nabla u \right) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

非線形 MREIT 方程式に関して、解の存在や一意性などの基本的な課題を調べることは自然なことである。第7章で1つの解に基づいて無限個の相異なる解を構成し、さらに解が存在しない例を示した。これは非線形 MREIT 方程式が実際上の仮定の下では一般に一意可解でないことを示している。したがって、モデル方程式を修正する必要がある。このように修正された方程式に対して、区分的に連続な伝導率の分布の不連続性の決定について一意性を証明した。

（4）電場探査

第8章において、与えられた領域の内部にコンパクトに埋め込まれた伝導体 D を再構成するという逆問題を考察した。支配方程式は次のように記述できる：

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \overline{D}, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial D \qquad \text{and} \qquad u = f \quad \text{on } \partial\Omega.$$

$\Gamma \subset \partial\Omega$ として、単一のコーシーデータ $\left(f, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\Gamma}\right)$ から D を決定する問題を解いた。これは電場探査の数学モデルである。

この逆問題に関しては、一意性は古典的な一意接続性によって証明されるので、観測データからDを再構成することが次に重要な課題となる。このために、データから領域Dの情報を抽出することが重要である。この逆問題は非線形で不安定なので、これは困難な課題である。そこで再構成のために数値的に有効なアルゴリズムの構築を目指した。そのようなアルゴリズムはリアルタイムで実行できるものでなくてはならない。このような観点から、第8章でリアルタイムで実行できる新しい方法として球面探査法ならびに平面探査法を提案し有効性を検討した。