論文審査の結果の要旨

氏名　金 成煥

金 成煥氏は学位申請論文「楕円型方程式における不均質性決定逆問題（Inverse Problems of Determining Inhomogeneity in Elliptic Equations)」において以下の４つの逆問題の数学解析を行った。

(1) 金属と半導体の接触に関する逆問題
(2) 伝導率逆問題
(3) 磁気共鳴電気インピーダンス·トモグラフィ
(4) 電場探査

これらの逆問題は半導体素子の設計、医学診断ならびに非破壊検査と密接に結びついた実際上の必要性の高い極めて重要な応用逆問題である。そのような実世界における重要性にも関わらず、個々の数値実験の結果は数多くあるものの、数学解析的な成果は乏しい。金 成煥氏は上述の逆問題の数学解析の第一の課題である一意性の問題を中心に考察した。これらの逆問題は数学的には、楕円型方程式の係数の不連続点や方程式が成り立っている領域の形状を境界観測によって決定する逆問題として定式化することができる。しかしながら具体的な解析のためには、それぞれの逆問題に応じて最大値原理、対称性、解の滑らかさなど数学的な知見を駆使する必要がある。上述の４つの逆問題に関して簡単に審査結果を述べる。

(1) 金属と半導体の接触に関する逆問題：
この逆問題は次の楕円型方程式の境界値問題における特性関数 χ_D の台 D を境界における観測データ $u|_{\partial\Omega}$ から決定する問題として定式化することができる：

$$-\Delta u + p\chi_D u = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \qquad \text{on } \partial\Omega.$$

ここで p は既知の定数である。境界データ $(g, u|_{\partial\Omega})$ が D を一意的に決定するかどうかを証明するという一意性の問題は合理的な数値計算を実施する上で必要不可欠の基本的な問題であるが、一般の凸領域 D に対してながらく未解決問題であった。金氏はこのような未解決問題に対して、次のような２つの場合に一意性を証明した。

(a) 未知領域 D がある種の対称性をもつことが仮定できる場合：このような仮定は D が例えば楕円ならば成立し、既存の結果を特殊な場合として含んでいる。

(b) 未知領域 D が多角形領域の場合：この場合の一意性は本論文以前には知られていなかった。この手法は本論文において等方弾性体の外力項の台を決定する逆問題の一意性にも適用された。

(2) 伝導率逆問題：
これは電気インピーダンス·トモグラフィにおいて現れ、医学診断において極めて重要な逆問題である。以下のように数学的にモデル化することができる：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

ただし、人体の伝導率の分布 σ の代表的なモデルとして $\sigma(x) = \ell(x) + m(x)\chi_D(x)$ を採用する。ここで ℓ、m は既知の正値関数である。そのとき、$u|_{\partial\Omega}$ の観測値から Dを決定する際の一意性を考察した。

係数 ℓ、m がともに正の定数である場合には一意性は、多角形領域 Dの範囲内で証明されているが、人体のモデルとしては ℓ、m が場所とともに変化する関数であることが自然である。既存の論文における手法は ℓ、m がともに正の定数でなくては適用できなかったが、本論文において一般の変数係数の場合に一意性を確立し、既存の成果の一般化に成功した。

(3) 磁気共鳴電気インピーダンス·トモグラフィ：
人体の伝導率の分布は医学診断にとって重要度がたいへん高い逆問題である。磁気共鳴電気インピーダンス·トモグラフィにおいては、人体内部のデータを観測することが可能となり、次のようにモデル化することができる:

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{a}{|\nabla u|} \right) \nabla u \right) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

ここで $a(x)$ は観測データから決まる関数であって、$\frac{a(x)}{|\nabla u(x)|}$ の不連続点を決定することが主要課題となる。本論文においてこの境界値問題の解の非一意性を構成的に証明し、実用上の要請を考慮に入れて修正されたモデル方程式に対して、伝導率の分布関数の不連続性の決定について一意性を証明した。

(4) 電場探査：
領域の内部に埋め込まれた伝導体 Dを境界データを用いて再構成するという逆問題を考察した。これは次のようにモデル化される：

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \setminus \overline{D}, \quad u = 0 \text{ on } \partial D, \quad u = f \text{ on } \partial\Omega.$$

ここで D の再構成のためのアルゴリズムを 2 つ提案し、その有効性を確かめた。

本学位申請論文における成果はすべて国際的な学術誌に既に出版されていたり、出版が受諾されているものばかりであり、この分野で著しい成果である。

よって、論文提出者　金 成煥　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。