# 論文の内容の要旨

**論文題目** Studies on local properties of multiplier ideals
(乗数イデアルの局所的性質の研究)

**氏　名** 髙木俊輔

乗数イデアルは最初 Demailly, Nadel, Siu 等の仕事において，複素解析的文脈で登場した．彼らは線束上の特異計量に付随する乗数イデアルの概念を導入し，乗数イデアルを巻き込んだ形の小平型消滅定理を証明した．その後すぐに乗数イデアルは，特異点解消と食い違い因子を用いて，純代数幾何的に再定式化された．原理的には解析的な乗数イデアルの方がより一般的な概念だが，実際にはこれまでに得られた応用のほとんどは本質的に代数幾何的なものであり，代数的な言葉に翻訳できる．さらに代数的な乗数イデアルはそれ自体で様々な応用を生み出し始めた (cf. [2], [1], [3], [8], [9])．今やこのイデアルは双有理幾何学において重要な道具となりつつあるように思われる．本論文では，乗数イデアルの局所的性質に関する次の 4 つの内容を扱う．

## 1　いつ乗数イデアルの劣加法性は成立するか？

乗数イデアルの劣加法性とは，イデアルの積の乗数イデアルが，各々の乗数イデアルの積に含まれるという性質である．Demailly–Ein–Lazarsfeld [1] は，複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された非特異代数多様体上でこの劣加法性が成り立つことを証明した．彼らの結果は，可換環論及び代数幾何学に優れた応用を持つ．例えば，正則局所環のイデアルの形式冪の増大度に関する問題 [3] や，巨大な因子の体積は爆発の上の豊富な因子の自己交点数によって近似できるという藤田の近似定理 [5] などがある．しかしながら彼らの証明は，川又–Viehweg の消滅定理と対角線埋め込みが完全交差であるという事実を用いるため，正標数の体上定義されている多様体や特異点を許す多様体上では機能しない．従って，乗数イデアルの劣加法性がどのような多様体上で成立するか，というのは大変興味深い問題である．この問題について，2 次元の場合には，反ネフサイクルによる整閉イデアルの特徴づけを用いると，次の結果が得られる．

**定理 1 (Theorem 2.2.2).** $(R, \mathfrak{m})$ を 2 次元エクセレント $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規局所環とする．このとき，$\operatorname{Spec} R$ が高々ログ端末特異点しか持たないことと，乗数イデアルの劣加法性が成り立つことは同値である．

3 次元では定理 1 の反例が存在する (Example 2.3.1)．またトーリック多様体上の単項式イデアルに付随する乗数イデアルに関しても，3 次元で劣加法性が成り立たない例が存在する (Example 2.3.2)．

## 2 判定イデアルの一般化について

乗数イデアルは密着閉包の理論によって解釈され得る．$R$ を標数 $p>0$ のネーター可換環とする．Hochster-Huneke [7] によって導入された判定イデアル $\tau(R)\subseteq R$ は，$R$ における全ての密着閉包関係の零化イデアルとして定義され，密着閉包の理論において中心的な役割を担う．原–吉田 [6] は，密着閉包の一般化として，与えられたイデアル $\mathfrak{a}\subseteq R$ と実数 $t>0$ に付随する $\mathfrak{a}^t$-密着閉包という概念を導入し，$R$ の全ての $\mathfrak{a}^t$-密着閉包関係の零化イデアルとして $\tau(\mathfrak{a}^t)\subseteq R$ というイデアルを定義した．そして彼らは，$(R,\mathfrak{a})$ を標数 0 の正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 局所環とそのイデアルの対の十分大きな標数 $p\gg 0$ への還元としたとき，イデアル $\mathfrak{a}\subseteq R$ と実数 $t>0$ に付随する乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ が $\tau(\mathfrak{a}^t)$ と一致することを証明した．

我々は Matlis 双対性を用いて，この $\tau(\mathfrak{a}^t)$ というイデアルの特徴付けを与え (Lemma 3.2.1)，局所化や完備化，余次元 1 でエタールな有限射における $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の振る舞いを調べる (Proposition 3.3.1, 3.3.2, Theorem 3.3.3)．さらにこの特徴付けの応用として，次の Lipman–Skoda の定理 [12], [11] の類似及び $\tau((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^t)$ の和公式を証明する．

**定理 2.** $R$ を正標数の正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 局所環とし，$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ を $R$ の非零イデアルとする．さらに任意の実数 $t>0$ を固定する．

(1) (Theorem 3.4.2) $\mathfrak{a}$ は高々 $l$ 個の元で生成される還元イデアルを持つと仮定する．このとき，$\tau(R,\mathfrak{a}^l\mathfrak{b}^t)=\tau(R,\mathfrak{a}^{l-1}\mathfrak{b}^t)\mathfrak{a}$.

(2) (Theorem 3.5.1) $\tau((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^t)=\sum_{\lambda+\mu=t}\tau(\mathfrak{a}^\lambda\mathfrak{b}^\mu)$.

$\tau(\mathfrak{a}^t)$ と乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ の対応より， 定理 2 の (1) は Lipman–Skoda の定理の別証明を，(2) は Mustaţă による乗数イデアルの和公式 [13] の一般化を与える．Lipman–Skoda の定理及び Mustaţă の和公式の証明には，標数 0 の体上でしか成り立たない消滅定理を用いる．それに対し我々の定理は，上記の $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の特徴づけを用いると，イデアルの冪に関する簡単な考察から直ちに従う．ここに $\tau(\mathfrak{a}^t)$ というイデアルを考える利点がある．

## 3 F-特異点対と一般余次元の逆同伴

Ein–Mustaţă–安田 [4] はジェットスキームとモチーフ積分の理論を用いて，全空間が非特異の場合に，LC 対の逆同伴を証明した．すなわち，$X$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された非特異代数多様体とし，$Y=\sum_{i=1}^k t_iY_i$ を $X$ の閉部分スキーム $Y_i\subsetneq X$ と実数 $t_i>0$ の形式和とする．また $Z$ を $X$ 上の正規有効因子で，$Z\not\subset\cup_{i=1}^k Y_i$ を満たすものとする．このとき対 $(Z,Y|_Z)$ が LC であることと，対 $(X,Y+Z)$ が $Z$ の近傍で LC であることは同値である．この結果を，密着閉包の理論を用いて，$Z$ が任意余次元の正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 閉部分多様体の場合に拡張する．

まず F-正則環，F-純環の概念を，環 $R$ とそのイデアル $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_k\subset R$ と実数 $t_1,\dots,t_k>0$ の対 $(R,\mathfrak{a}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{a}_k^{t_k})$ に対して拡張する．このような F-特異点対は，双有理幾何学に現れる特異点対と対応する．より正確に言えば，$\mathbb{Q}$-Gorenstein 強 F-正則型対と KLT 対は一致し，$\mathbb{Q}$-Gorenstein 純 F-正則型対 (resp. $\mathbb{Q}$-Gorenstein F-純型対) は PLT 対 (resp. LC 対) である (Proposition 4.1.9)．この対応とイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ と乗数イデアル $J(\mathfrak{a}^t)$ の対応を利用すると，次の定理が得られる．

**定理 3 (Theorem 4.2.1, 4.2.2).** $X$ を標数 0 の体上定義された非特異代数多様体とし，$Y=\sum_{i=1}^k t_iY_i$ を $X$ の閉部分スキーム $Y_i\subsetneq X$ と実数 $t_i>0$ の形式和とする．また $Z\subsetneq X$ を，

$Z \not\subset \cup_{i=1}^{k} Y_i$ を満たす正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 閉部分多様体とする．もし対 $(Z, Y|_Z)$ が KLT (resp. LC) ならば，対 $(X, Y+Z)$ は $Z$ の近傍において PLT (resp. LC) になる．

KLT 対の場合は，上記の F-特異点対と特異点対の対応から，F-特異点対の問題 (Theorem 4.1.12) に帰着される．それに対し，LC 対と $\mathbb{Q}$-Gorenstein F-純型対の同値性は未解決なので，同じ方針では LC 対の場合は証明できない．LC 対の場合の証明は次の 3 段階からなる．簡単のため $Y = 0$ の場合を考える．また局所的性質を論じているので，$X = \operatorname{Spec} R$ として良い．

(1) 乗数イデアルの最も重要な局所的性質である制限定理 [11, Theorem 9.5.1, Example 9.5.3] を任意余次元の場合に拡張する．すなわち $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を任意のイデアル層, $t > 0$ を任意の実数, $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ を $Z$ の定義イデアルとしたとき，任意の実数 $0 \le s < 1$ に対し，$\mathcal{J}(Z, (\mathfrak{a}\mathcal{O}_Z)^t) \subset \mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^t \mathcal{I}_Z^s) \cdot \mathcal{O}_Z$ となることを示す (Corollary 4.1.14).

(2) (1) を用いて，$W$ を $Z$ の非 KLT 点集合としたとき，対 $(X, Z)$ が LC であることと対 $(X, W)$ が LC であることが同値であることを示す.

(3) $\mathcal{I}_W \subset \mathcal{O}_X$ を $W$ の定義イデアルとしたとき，任意の実数 $0 \le s < 1$ に対し，$\mathcal{J}(X, \mathcal{I}_W^s) = \mathcal{O}_X$ であることを示す．これは対 $(X, W)$ が LC であることを意味する．従って (2) より，対 $(X, Z)$ は LC である．

(1)，(3) を示すためには，十分大きな標数 $p \gg 0$ に還元し，乗数イデアル $\mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^t)$ の代わりにイデアル $\tau(R, \mathfrak{a}^t)$ を考える．その際 $X$ が非特異であるので，環 $R$ 上の Frobenius 射が平坦になることが重要である．Frobenius 射の平坦性を用いると，Matlis 双対性を通じて，イデアル $\tau(R, \mathfrak{a}^t)$ に関する条件をイデアル論の問題に翻訳することができ，これによって (1) と (3) が従う．

## 4 F-純閾値について

乗数イデアルと関連の深い不変量である LC 閾値の類似として，F-純閾値の概念を導入する．$R$ を正標数の F-純環，$\mathfrak{a}$ を $R$ のイデアルとしたとき，十分小さい実数 $t \ge 0$ に対して対 $(R, \mathfrak{a}^t)$ は F-純になり，非常に大きな実数 $t > 0$ に対して $(R, \mathfrak{a}^t)$ は F-純になり得ない．この $t$ の臨界値をイデアル $\mathfrak{a}$ の F-純閾値 $\mathrm{c}(\mathfrak{a})$ と定義する．標数 $p > 0$ への還元を考えることにより，標数 0 の環（のイデアル）に対しても F-純閾値は定義できる．イデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ と乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ の対応を用いると，標数 0 のログ端末特異点においては，F-純閾値と LC 閾値は一致する．

我々はまず正標数の環の F-純閾値の基本的性質を調べ，極大イデアルの F-純閾値がその環の性質を規定することを見る．すなわち，$(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の $d$ 次元ネーター局所環としたとき，$\mathrm{c}(\mathfrak{m}) > d-1$ と $R$ が正則であることが同値であり，また $R$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein ならば，$\mathrm{c}(\mathfrak{m}) = d-2$ と $R$ の完備化 $\widehat{R}$ が一般化された $\mathrm{cA}_n$ 特異点であることが同値である (Theorem 5.1.7).

次に標数 0 の環の F-純閾値の性質を調べ，それを用いて 3 次元端末特異点の性質を調べる．特に F-純閾値を用いて，3 次元端末特異点の重複度に関する垣見の結果 [10] の別証明を与える (Proposition 5.2.10).

また F-純閾値を用いて，LC 閾値に関する幾つかの結果の類似を与える．$(R, \mathfrak{m})$ を正標数の正則局所環としたとき，LC 閾値の場合と同様の議論が機能して，$\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a} \subset R$ の F-準閾値 $\mathrm{c}(\mathfrak{a})$ と $\mathfrak{a}$ の重複度 $\mathrm{e}(\mathfrak{a})$ の間の不等式が得られる (Proposition 5.3.5)．さらに，F-準閾値の上界，下界 (Proposition 5.3.1, 5.3.2) 並びに F-純閾値の制限定理 (Proposition 5.3.3)，和公式 (Proposition 5.3.4) が，LC 閾値の場合より簡単な議論によって示される．

## 参考文献


[1] Demailly, J.-P., Ein, L. and Lazarsfeld, R., *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan. Math. J. **48** (2000), 137–156.

[2] Ein, L. and Lazarsfeld, R., *A geometric effective Nullstellensatz*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 427–448.

[3] Ein, L., Lazarsfeld, R. and Smith, K. E., *Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties*, Invent. Math. **144** (2001), 241–252.

[4] Ein, L., Mustaţă, M. and Yasuda, T., *Jet schemes, log discrepancies and Inversion of Adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), 519–535.

[5] Fujita, T., *Approximating Zariski decomposition of big line bundles*, Kodai Math. J. **17** (1994), 1–3.

[6] Hara, N. and Yoshida, K., *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143–3174.

[7] Hochster, M. and Huneke, C., *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 1, 31–116.

[8] Kawamata, Y., *Deformations of canonical singularities*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 1, 85–92.

[9] Kawamata, Y., *On the extension problem of pluricanonical forms*, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 193–207.

[10] Kakimi, N., *On the multiplicity of terminal singularities on threefolds*, arXiv: math.AG/0004105, preprint.

[11] Lazarsfeld, R., *Positivity in algebraic geometry*, preprint.

[12] Lipman, J., *Adjoints of ideals in regular local rings*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 739–755.

[13] Mustaţă, M., *The multiplier ideals of a sum of ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 1, 205–217.