論文の内容の要旨

論文題目　NEW METHODS IN BIRATIONAL GEOMETRY; PIECEWISE MORPHISMS AND MOTIVIC INTEGRATION
(双有理幾何学における新しい手法；構成的射とモティヴィック積分)

氏名　　　安田　健彦

本論文は次の二つの部分からなる。

1. Piecewise morphisms of birational foliated varieties
（双有理葉層多様体の構成的射）
2. Motivic integration over Deligne-Mumford stacks
（Deligne-Mumford スタック上のモティヴィック積分）

第一部は、モティヴィック積分により示される事実「K 同値な非特異完備代数多様体は等しいホッジ数を持つ」から自然に生じる、「どのように二つの代数多様体の点集合の間に、１対１対応を与えるか」という問題を提起し、部分的回答を与える。第二部では、モティヴィック積分を Deligne-Mumford スタックに一般する。この非自明な一般化により新しい現象（自己同型群の数値的寄与）が現れることを確認する。また応用として、スタックと $\mathbb{Q}$-因子の対で川又ログ端末特異点を持つものに対し、不変量を定義する。この不変量は、Batyrev による弦理論 E 関数や軌道体 E 関数、Chen と Ruan による軌道体コホモロジーの一般化になっている。

1　双有理葉層多様体の構成的射

X、Y を双有理同値な非特異射影的複素代数多様体とする。X、Y は K 同値であると仮定しよう。すなわち、非特異代数多様体 Z と固有双有理射 $Z \to X$、$Z \to X$ が存在し、$K_{Z/X} = K_{Z/Y}$ を満たす。たとえば、X、Y が極小モデルのとき、これらは K 同値である。このとき、モティヴィック積分の変換公式から、X、Y のホッジ数が等しいことがしたがう。

$$h^{p,q}(X) = h^{p,q}(Y).$$

そこで、次の問題を考えるのは自然であろう。

> **問題：**局所的閉部分集合への分解、$X = \coprod_{i\in I} X_i$、$Y = \coprod_{i\in I} Y_i$ が存在し、全ての i に対し $X_i \cong Y_i$ が成り立つか。そして、もし成り立つ場合は、どのように同型写像 $X_i \cong Y_i$ を構成するか。

実際、もしこのような局所的閉部分集合への分解が存在すれば、E 多項式の加法性からホッジ数の等価性はモティヴィック積分を経ずに直ちに従う。K 同値の最も単純な例の一つフロップの場合は、このような分解が明らかに存在する。しかし、一般に標準的な同型射 $X_i \cong Y_i$、標準的な写像 $X \to Y$ は存在しないことも明らかである。したがって、それらを見つけるためには X、Y がさらに何らかの構造を備えている必要がある。

本論分ではこの構造の候補として、1 次元葉層構造を考える。X が 1 次元葉層構造を備え、適当な条件を満たすとき、標準的な写像 $f : X \to Y$ が存在し、適当な局所的閉部分集合への分解 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ に対して $f|_{X_i}$ は代数多様体の射であるということを証明する。そして、X の葉層構造から自然に導かれる Y の葉層構造が非特異であるとき、この射は全単射であることを証明する。

第一部の最後に、具体的な例をしめす。また、その例を GIT 商の視点から解釈し、点の対応が軌道の分裂に対応することを見る。

2　Deligne-Mumford スタック上のモティヴィック積分

モティヴィック積分において、ジェットとアークが基本的な役割を果たす。代数多様体 X に対し、n ジェットとは X の $k[t]/t^{n+1}$ 点のことで、アークとは $k[[t]]$ 点のことである。n ジェットやアークをパラメタ付けるスキーム J_nX、$J_\infty X$ が存在し、自然な射 $\pi_n : J_\infty X \to J_nX$ が存在する。射 π_n を使い、アーク空間 $J_\infty X$ にある種の測度が定義され、積分を行うことができる。これがモティヴィック積分の概要である。

これを Deligne-Mumford スタックに一般化するためには、スタック $\mathcal{X}$ の $k[t]/t^{n+1}$ 点や $k[[t]]$ 点を考えるだけでは不十分である。ツイステッド・n ジェットをスタックの表現可能射

$$[(\mathrm{Spec}\ k[t]/t^{nl+1})/\mu_l] \to \mathcal{X}$$

と定義し、ツイステッド・アークを表現可能射

$$[\mathrm{Spec}\ k[[t]]/\mu_l] \to \mathcal{X}$$

と定義する。ここで記号 [/] は商スタックを表すものとする。k スキームによってパラメタ付けられたツイステッド・n ジェットやツイステッド・アークの圏を $\mathcal{J}_n\mathcal{X}$、$\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ とする。これらも Deligne-Mumford スタックになることを第二部の最初の部分で証明する。各 n に対し自然な射 $\pi_n : \mathcal{J}_\infty\mathcal{X} \to \mathcal{J}_n\mathcal{X}$ が存在し、これを使って代数多様体の場合と同様に $\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ に測度を導入する。

代数多様体の固有双有理射 $f : Y \to X$ に付随する写像 $f_\infty : J_\infty Y \to J_\infty X$ はそれぞれの測度零（従って無視することができる）部分集合を除いて、全単射となることが、固有性の付値判定法より従う。そして二つの測度の関係はつぎの変換公式に依って表される：

$$\int_{f_\infty A} \mathbb{L}^h d\mu_X = \int_A \mathbb{L}^{h\circ f_\infty - \mathrm{ord}\,\mathrm{Jac}_f} d\mu_Y$$

この公式はモティヴィック積分の理論の中で最も基本かつ重要なもので、特異点の特徴付け、不変量の K 同値性などはこの公式を使って証明できる。

第二部の主要定理は、この変換公式のスタックへの一般化である。Deligne-Mumford スタックの固有双有理射 $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ に対し、付随する写像 $f_\infty : \mathcal{J}_\infty\mathcal{Y} \to \mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ は同様に測度零の部分集合を除いたところで、全単射となっている。しかし変換公式を定式化する際に、スタック特有の新しい現象が現れる。まず代数多様体の場合は整数値関数だった f の Jacobian の位数関数がスタックの場合は一般に有理数値関数になる。更に各点の自己同型群の数値的寄与を考慮しなければならない。公式は次のようになる：

スタックに対する変換公式

$$\int_{f_\infty A} \mathbb{L}^{h+\mathfrak{s}_\mathcal{X}} d\mu_\mathcal{X} = \int_A \mathbb{L}^{h\circ f_\infty - \mathrm{ord}\,\mathrm{Jac}_f + \mathfrak{s}_\mathcal{Y}} d\mu_\mathcal{Y}$$

関数 $\mathfrak{s}_\mathcal{X}$ と $\mathfrak{s}_\mathcal{Y}$ が自己同型群の寄与にあたる部分である。この公式の特別な場合は著者により以前の論文の中で証明されていた。

変換公式の応用として、正規 Deligne-Mumford スタック $\mathcal{X}$ と $\mathbb{Q}$ 因子 D の対で川又ログ端末特異点を持つものと構成的部分集合 $W \subset \mathcal{X}$ に対し不変量 $\Sigma(W; X, D)$ を定義する。この不変量は同時に Batyrev の弦理論ホッジ数と Chen と Ruan の軌道体コホモロジーの一般化になっている。この不変量を使うと、いくつかのタイプの McKay 対応が直ちに従う。