論文審査の結果の要旨

氏名安田 健彦

論文提出者 安田健彦 は, 双有理幾何学における新しい手法について研究した. これらの手法は, モティヴィック積分の手法を発展させたものである.

Batyrev は, 二つの双有理同値な Calabi-Yau 多様体 (滑らかな射影的多様体で標準因子が 0 と線形同値なもの) のベッチ数は等しいということを, p 進積分の理論を使って証明した. Kontsevich はモティヴィック積分の理論を作ることによって, ベッチ数のみならず, ホッジ構造までこめて等しいことを証明した. さて, 双有理幾何学においては, 特別な種類の特異点が重要であり, このような特異点を持った代数多様体も同時に扱う必要がある. そこで, Batyrev はこれを推し進めて, 対数的末端特異点を持つような代数多様体とその上の $\mathbb{Q}$-因子の組に対して, stringy なホッジ構造というものを定義した. さらに, 滑らかな多様体の有限群による商多様体になっているような代数多様体に対しては, orbifold としてのホッジ構造というものも定義した. そして, これらが等しいといういわゆるコホモロジカルな MacKay 対応を証明した.

しかし, 商特異点のみを持つような一般の代数多様体は, このように大域的にみて商多様体になっているとは限らない. このような代数多様体は, エタール位相でみると局所的には商多様体になっているので, 滑らかな Deligne-Mumford スタックというものを構成することができる. そこで, 安田氏は Deligne-Mumford スタックに対するモティヴィック積分の理論を構築することにした. 通常のモティヴィック積分の場合には, 与えられた代数多様体上のジェットのなす空間上に, 測度を定義することからはじめる. この測度は, 代数多様体全体のなす集合の Grothendieck 環を, 局所化して完備化して得られる環に値を持つものである. Deligne-Mumford スタックの場合には, 各点が自己同型群を持つので, それを考慮に入れて, ねじれたジェットの空間というものを考えることになる. そして, 測度の値も, アフィン直線の同値類 $\mathbb{L}$ の分数べきまで付け加えた環に値をとることになる. このような基礎理論を整備することによって, 安田氏は stringy なホッジ構造と orbifold としてのホッジ構造とを, 統一した不変量を定義

することに成功した.

主定理は以下に述べる変数変換公式である. 滑らかな Deligne-Mumford スタック $\mathcal{X}$ から滑らかな Deligne-Mumford スタックまたは特異点を許す代数多様体 $\mathcal{Y}$ への固有双有理写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を考える. このとき, 公式

$$\int_{f_\infty(B)} \mathbb{L}^{h+s_{\mathcal{X}}} d\mu_{\mathcal{X}} = \int_B \mathbb{L}^{h \circ f_\infty - \mathrm{ord}\ \mathrm{Jac}_f + s_{\mathcal{Y}}} d\mu_{\mathcal{Y}}$$

が成り立つ. ここで, B は可測集合, h は可測関数, ord Jac_f はヤコビアンの位数であり, s は自己同型群の作用から来る重さ関数である. この定理の系として, 安田氏はより一般的な MacKay 対応を証明することができた. 安田氏の証明は, Batyrev による証明よりも自然な証明であることに注意する.

このようにして, フロップによってつながった二つの代数多様体においては, モティヴィック積分の値は等しいことがわかった. すなわち, これらの代数多様体は互いに切り貼りを行うという操作を, 無限回行うことによってつながっていることがわかった. しかし, フロップの既知の例では, 切り貼りの操作は有限回で十分であることが知られている. そこで安田氏は, 構成的射の理論を展開した. そして, 特殊な条件を満たすようなフロップにおいては, 切り貼りの操作は有限回で十分であることを証明した.

以上の結果は, 双有理幾何学の発展に大きく貢献するものである. よって, 論文提出者 安田健彦 は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.