論文の内容の要旨

論文題目　On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles
（消滅サイクルによる非可換ルビン・テイト理論について）

氏名 吉田 輝義

消滅サイクルによる非可換 Lubin-Tate 理論とは，局所体上の GL_n に関する局所 Langlands 対応の本質的部分が高さ n の形式 O_K 加群の変形空間の消滅サイクルコホモロジー群上に実現していることを主張したものであり，Deligne-Carayol により予想された ([Car])．この予想は Harris-Taylor による局所 Langlands 対応の証明 ([HT]) に伴って，志村多様体の大域的理論を駆使して証明されたが，本論文では，この予想の特殊な場合（Galois 表現が馴分岐の場合）が，大域的方法に依存せずとも，形式 O_K 加群の変形空間の方程式を計算しその適当なブローアップを調べるという純局所的な方法で本質的に証明できることを示す．この証明は，局所体の剰余体（有限体）上の簡約代数群の表現を代数多様体の ℓ 進コホモロジーの中に実現する Deligne-Lusztig 理論と関係づけるという方法で行う．

主結果を説明するためにまず記号を導入する．K を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，その整数環を O_K，剰余体を k とする．さらに素元 π を一つ選び，これを固定する．K の最大不分岐拡大の完備化 $\widehat{K^{\mathrm{ur}}}$ の整数環を $W=\widehat{O_K^{\mathrm{ur}}}$ とする．$\widehat{K^{\mathrm{ur}}}$ の絶対 Galois 群は K の惰性群 I_K である．自然数 $n\geq 1$ に対して，レベル π をもつ高さ n の形式 O_K 加群の変形空間を X とすると，これは W 上の相対次元 $n-1$ 次元の正則な完備局所環のスペクトラムである (Drinfeld [Dr])．このスキームの幾何的生成ファイバー $X_{\overline{\eta}}=X\times_{\mathrm{Spec}W}\mathrm{Spec}\widehat{\overline{K^{\mathrm{ur}}}}$ の ℓ 進エタールコホモロジー群 $H^i(X_{\overline{\eta}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$（$\ell$ は k の標数と異なる）を左 $GL_n(k)\times I_K$-加群として考える．

一方，代数群 $GL_n(k)$ およびその Weyl 群（n 次の対称群）の元 $(1,\ldots,n)$，言い換えると k_n を k の n 次拡大として有理点群 $T(k)$ が $k_n^\times$ となるような GL_n の部分トーラス T に対応する Deligne-Lusztig 多様体（$\overline{k}$ 上の滑らかなアフィン代数多様体）を DL とする．この多様体は $GL_n(k)\times k_n^\times$ の右作用を持ち，標準全射 $I_K\to k_n^\times$ によってコンパクト台エタールコホモロジー群 $H_c^i(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は左 $GL_n(k)\times I_K$-加群となる．これらのコホモロジー群の交代和を次のように表し，$GL_n(k)\times I_K$ の左作用をもつ $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間のなす Grothendieck 群の元と考える：

$$H^*(X_{\overline{\eta}})=\sum_i(-1)^i[H^i(X_{\overline{\eta}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)],\quad H^*(DL)=\sum_i(-1)^i[H_c^i(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

以上の記号により，本論文の消滅サイクルコホモロジー群に関する主定理は次のように述べることができる：

定理 1 (論文 Theorem 6.16).　(i) Grothendieck 群の元として，$H^*(X_{\overline{\eta}})=H^*(DL)$.

(ii) 各 i に対する $H^i(X_{\overline{\eta}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ のうち，$GL_n(k)$ の cuspidal 表現 π または I_K の指標 χ で $m<n$ なる m に対してノルム写像 $k_n^\times\to k_m^\times$ を経由しないものが現れるのは $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ のみであり，それらは $\bigoplus\pi_\chi\otimes\chi$ という形で対になって現れる．ここで $\chi\mapsto\pi_\chi$ は，$GL_n(k)$ の Steinberg 表現 St に対して $\pi_\chi\otimes\mathrm{St}=\mathrm{Ind}_{T(k)}^{GL_n(k)}\chi$ という関係によって特徴付けられる，これらの表現の間の 1 対 1 対応である．

この定理の (ii) に現れる表現の対応は原理的には Harris-Taylor の主定理のうちの一つ ([HT], Theorem VII.1.5) から導出できるものであるが，本論文では局所的な幾何学的議論のみによってまず (i) を示した後に，Deligne-Lusztig 理論を用いることで証明される．また (ii) のうち該当する表現が最も高次のコホモロジー群のみに現れるという点は，cuspidal 表現の側についてはFaltings [Fa] によって Harris-Taylor の結果を用いて示されている．(ただし，彼らの結果を上の形に翻訳するためには，この X のコホモロジーに現れる部分である，深さ 0 の supercuspidal 表現の場合の局所 Langlands 対応を具体的な形で知る必要がある．この場合，$GL_n(K)$ の supercuspidal 表現は $GL_n(k)$ の cuspidal 表現の引き戻しおよび誘導により得られるものであり，K の Weil 群 W_K の n 次元既約表現は，K の n 次不分岐拡大 L の Weil 群の指標で，$I_L = I_K$ への制限が上記定理 (ii) の形の指標となるものから誘導されたものとなっている．馴分岐な W_K の既約 n 次元表現はすべてこの場合に該当する.)

さて，本論文では上の定理を，X のよいモデルを構成して幾何的生成ファイバーのコホモロジー群を特殊ファイバーのコホモロジー群を用いて計算するという方法で証明する．その過程で，変形空間 X に関する次のような重要な知見が得られる.

定理 2 (論文 Proposition 3.4, Theorem 4.5, Proposition 6.10). (i) 変形空間 X は W 上のスキームとして

$$\mathrm{Spec} W[[X_1, \ldots, X_n]]/(P(X_1, \ldots, X_n) - \pi),$$

に同型である．ここで $P \in W[[X_1, \ldots, X_n]]$ は次の形の形式的べき級数である.

$$(\mathrm{unit}) \cdot \prod_{(a_i \bmod \pi)_i \in k^n \setminus \{\underline{0}\}} \left([a_1](X_1) +_{\tilde{\Sigma}} \cdots +_{\tilde{\Sigma}} [a_n](X_n)\right)$$

この $[a_i]$ および $+_{\tilde{\Sigma}}$ は X 上の普遍形式 O_K 加群を $W[[X_1, \ldots, X_n]]$ まで持ち上げて得られる形式 O_K 加群の O_K 作用および加法である.

(ii) 変形空間 X には W 上の広義半安定モデル Z_{st}，すなわち W-スキームの固有射 $Z_{st} \to X$ で生成ファイバー上では同型であり Z_{st} が広義半安定還元をもつものが存在する．ここで広義半安定還元とは，すべての閉点における完備局所環が W 代数として

$$W[[T_1, \ldots, T_n]]/(T_1^{e_1} \cdots T_d^{e_d} - \pi) \ \ (d \leq n)$$

に同型であり，e_i がすべて剰余標数 $\mathrm{char}\, k$ と互いに素となることをいう.

(iii) 離散付値環 W の馴分岐拡大 $W_n = W(\pi^{1/(q^n-1)})$ 上では，X の W_n 上平坦なモデルであってその特殊ファイバーの中に $GL_n(k) \times I_K$ 作用を持つ $\bar{k}$ 上の多様体として DL に同型なものを含むようなものが存在する.

この定理の (i) に当たる記述はより高いレベル π^m に対応する変形空間に対しても同様にできる．これらはある種のユニタリ型志村多様体の整数環上のモデルの W 上の局所的な方程式を与えるものであり，例えば $n = 2$, $K = \mathbb{Q}_p$ の場合には Katz-Mazur の行ったモジュラー曲線の悪い還元の記述 ([KM] Theorem 13.8.4) の整数環上への精密化となる．また上の定理の (ii) で得られるモデルの構成法は，対応するユニタリ型志村多様体の整数環上の広義半安定モデルの構成に応用することができ，原理的にはこの場合の K 上のユニタリ型志村多様体の ℓ 進コホモロジーの計算を大域体上の議論なしで行うことを可能にする．上の定理の (iii) は広義半安定モデルを W_n に底を変更したスキームの一部を正規化することにより得られるもので，前記定理 1 の証明の基礎となる.

謝辞

指導教官の斎藤毅教授には，消滅サイクルコホモロジーに関してさまざまなご教示を頂き，また論文中のいくつかの命題の証明を本質的に改善していただいた．筆者は教授の博士課程在学中の指導および激励に謝辞を捧げる．またこの論文の多くの部分は筆者が研究指導委託によってHarvard 大学に滞在した期間に執筆された．Richard Taylor 教授をはじめ同大学の方々に深く感謝したい．伊藤哲史・伴克馬・三枝洋一・斎藤新悟の各氏には多くの数学上および執筆上の助力および叱咤激励を受けた．その他にも，お世話になった東京大学や他の諸大学の諸先生・諸先輩方および同僚諸兄に感謝を捧げたい．

参考文献

[Car] H. Carayol, *Non-abelian Lubin-Tate theory*, in: *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions* (Academic Press, 1990), pp.15-39.

[DL] P. Deligne, G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103-161.

[Dr] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR Sbornik **23-4** (1974), 561-592.

[Fa] G. Faltings, *A relation between two moduli spaces studied by V.G. Drinfeld*, in: *Algebraic Number Theory and Algebraic Geometry* (Contemp. Math. **300**, Amer. Math. Soc., 2002), pp.115-129.

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies **108**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*, Ann. of Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, Princeton-Oxford, 2001.