論文審査の結果の要旨

氏名 吉田　輝義

K を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．局所 Langlands 対応は，K の絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の n 次元表現と，$GL_n(K)$ の既約可容表現との間の対応を与えるものであり，$n=1$ の場合が局所類体論にあたる。任意の n に対し，局所 Langlands 対応は，最近 M.Harris と R.Taylor により証明された．彼らは，志村多様体のコホモロジーを用いて，代数体上の Langlands 対応の一部を示すことにより，局所 Langlands 対応を証明した．この証明は，局所類体論を，大域類体論から導くようなものであり，純局所的な証明を与えることが，課題となっている．この問題について，H.Carayol は，局所 Langlands 対応は，ある種の形式群とそのレベル構造の変形空間のコホモロジーを分解することにより得られることを予想していた．Harris-Taylor の証明の帰結として，この予想は証明されているが，上述のように，これは大域的方法によるものである．そこで問題は，この Carayol の予想を，純局所的に証明することである．吉田君は本論文において，有限体上の GL_n の表現についての Deligne-Lusztig の理論と結びつけることにより，レベルが π の場合の Carayol の予想の純局所的な証明を与えた．

K を局所体とし，その剰余体 F の位数を q とする．$\bar{F}$ を F の代数閉包とし，K^{ur} で K の最大不分岐拡大の完備化を表す．O_K 上の完備局所 Noether 環 A 上の 1 変数形式群 G は，O_K の作用があたえられていてかつ，その Lie 環への O_K の作用が与えられた環の準同型 $O_K \to A$ と一致しているとき，形式 O_K 加群であるという．$n \geq 1$ を自然数とする。$\bar{F}$ 上の形式 O_K 加群 G_0 で，局所体 K の素元 π に対し，π 倍射 $[\pi]$ の次数が q^n であるものが，同型をのぞきただ一つ存在する．$O_{K^{\mathrm{ur}}}$ 上の任意の完備局所 Noether 環 A に対し A 上の高さ n の形式 O_K 加群 G と同型 $G \otimes_A \bar{F} \to G_0$ の対の同型類の集合を対応させる関手は，巾級数環 $A^{\mathrm{univ}} = O_{K^{\mathrm{ur}}}[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ で表現される．A^{univ} 上の普遍形式 O_K 加群 G^{univ} の Drinfeld レベル π^m 構造のモジュライ空間を X_m で表す．X_m は A^{univ} 上 Galois 群 $GL_n(O_K/\pi^m)$ をもつ正則局所環 A のスペクトルである．$I_K = \mathrm{Gal}(\overline{K^{\mathrm{ur}}}/K^{\mathrm{ur}}) \subset G_K$ を惰性群とする．消滅サイクルの空間 $H^q(X_{m,\overline{K^{\mathrm{ur}}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は自然な $GL_n(O_K/\pi^m) \times I_K$ の作用をもつ．Carayol の予想は，この表現の分解に関するものである．本論文では，$m=1$ の場合が調べられている．

$GL_n(F)$ の既約表現 π が cuspidal であるとは，π が $GL_n(F)$ の任意の非自明放物部分群からの誘導表現に現れないことをいう．F_n を有限体 F の n 次拡大とする．$F_n^\times$ の指標 χ が generic であるとは，n の任意の約数 $1 \leq m < n$ に対し χ が $N_{F_n/F_m} : F_n^\times \to F_m^\times$ による $F_m^\times$ の指標の引き戻しとならないことをいう．$GL_n(F)$ の Steinberg 表現を St とする．generic な $F_n^\times$ の指標 χ に対し，$\pi_\chi \otimes \mathrm{St} = \mathrm{Ind}_{F_n^\times}^{GL_n(F)} \chi$ という条件で特徴付けられる $GL_n(F)$ の cuspidal 表現を π_χ とする．対応 $\chi \mapsto \pi_\chi$ により，$F_n^\times$ の generic 指標と $GL_n(F)$ の cuspidal 表現は 1 対 1 に対応する．Deligne と Lusztig は，$GL_n(F) \times F_n^\times$ の作用をもつ $\bar{F}$ 上の代数多様体 DL を定義した．エタール・コホモロジー $H_c^q(DL, \mathbb{Q}_\ell)$ は自然に $GL_n(F) \times F_n^\times$ の表現となる．Deligne と Lusztig は，エタール・コホモロジー $H_c^q(DL, \mathbb{Q}_\ell)$ の $GL_n(F) \times F_n^\times$ の表現としての主要部分が，generic な指標 χ に関する直

和 $\bigoplus_\chi \pi_\chi \otimes \chi$ であることを示した．

標準全射 $I_K \to F_n^\times$ により，$F_n^\times$ の表現 χ を I_K の表現と考える．このとき本論文の主結果は次のとおりである．

定理　$m=1$ とし，$X=X_1$ とおく．

1. 交代和 $\sum_q (-1)^q [H^q(X_{\overline{K^{\mathrm{ur}}}}, \mathbb{Q}_\ell)]$ と $\sum_q (-1)^q [H_c^q(DL, \mathbb{Q}_\ell)]$ は，$GL_n(F) \times I_K$ の表現の Grothendieck 群の元として一致する．

2. $H^q(X_{\overline{K^{\mathrm{ur}}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が $GL_n(F)$ の cuspidal 表現を含むならば $q=n-1$ である．また $H^q(X_{\overline{K^{\mathrm{ur}}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が $F_n^\times$ の generic 指標を含むならば $q=n-1$ である．

χ を $F_n^\times$ の generic 指標とし，π_χ を対応する $GL_n(F)$ の cuspidal 表現とする。このとき，$H^{n-1}(X_{\overline{K^{\mathrm{ur}}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の χ 部分は π_χ 部分と等しく，$\chi \otimes \pi_\chi$ の重複度は 1 である．

定理は Harris-Taylor の結果から Faltings の結果もあわせて使えば導くこともできるが，本論文では純局所的な証明を与えている．証明の要点は次のとおりである．

1. 次の幾何学的な事実を示す．

X を O_K 上の n 次元正則平坦有限型スキーム，$x \in X$ をその閉ファイバー X_F の閉点とする．$D_1, \ldots, D_m$ を閉ファイバー X_F の x を含む既約成分とし，$e_1, \ldots, e_m$ を $X_F = \sum_i e_i D_i$ の重複度とする．$D_1, \ldots, D_m$ は x で正則と仮定し，$H_1, \ldots, H_m$ を $D_1, \ldots, D_m$ が定める $\mathbb{P}(m_x/m_x^2) \simeq \mathbb{P}_F^{n-1}$ の超平面とする．さらに，次の条件 (1),(2) がなりたつと仮定する．

(1)　$I \subset \{1, \ldots, m\}$ を任意の部分集合とし，k を $\bigcap_{i\in I} H_i$ の余次元とする．このとき，$\bigcap_{i \in I} H_i = \bigcap_{i \in I'} H_i$ をみたす位数 k の任意の部分集合 $I' = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$ に対し，$D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ は x でたがいに横断的に交わり，$\bigcap_{i\in I} D_i = \bigcap_{i \in I'} D_i$ がなりたつ。

(2)　任意の $y \in \mathbb{P}(m_x/m_x^2)$ に対し，$\sum_{i: y \in H_i} e_i$ は F で可逆である．

このとき，必要なら X を x の開近傍でおきかえると，X の正則な blow-up $X' \to X$ で，X' の閉ファイバー X'_F は正規交叉因子で，その各既約成分の重複度は F で可逆であるようなものが存在する．このことより，消滅サイクルの空間 $R^q\psi\mathbb{Q}_{\ell,\bar{x}}$ の交代和 $\sum_q (-1)^q [R^q\psi\mathbb{Q}_{\ell,\bar{x}}]$ は，$\mathbb{P}_F^{n-1}$ の超平面の族 $H_1, \ldots, H_m$ と，数列 $e_1, \ldots, e_m$ のみで定まる簡単な記述をもつことがわかる．

2. はじめに定義した変形空間 X が上の条件と同様な条件をみたしていることを示す．この場合は，$\mathbb{P}_F^{n-1}$ の超平面の族 $H_1, \ldots, H_m$ は F 上有理的な超平面すべてがなすものであり，さらに，e_i はすべて $q-1$ となっている．

これらのことと，消滅サイクルに関する比較定理より，主結果の純局所的な証明が得られる．

このように，本論文では，局所 Langlands 対応の幾何的な実現という Carayol の予想について，レベルが π の場合ではあるが，純局所的な証明を与えている．またその証明は，Deligne-Lusztig が有限体上の代数群の表現の研究において定義した多様体を用い，それ自体興味深いものである．よって論文提出者 吉田 輝義 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．