論文内容の要旨

Hall Effect on Equilibrium, Stability and Wave Spectrum of Magneto-Fluid Plasmas

（電磁流体プラズマの平衡、安定性、波のスペクトルに対するホール効果）

大﨑　秀一

1　MHD とホール MHD

”プラズマ流”、またはそれに伴う”流れ”と”磁場”がカップリングした場はプラズマ集団現象の最も重要な特徴の一つである。太陽観測衛星衛星やハッブル望遠鏡などによって、宇宙のプラズマの姿が詳しく見えるにしたがって、多様な流れがプラズマを支配し、豊かな構造を生み出していることが認識されている。実験室系（核融合プラズマ等）の研究でも静かに閉じ込めていたはずのプラズマが自発的に流れを生み出し、特性を大きく変化させることが分かってきた。このように様々な現象においてプラズマ流の重要性が明らかになる一方で、平衡や安定性、波動に対する流れの効果を理解するための物理と数学が十分であるとはいえない。

プラズマの理論的研究には、電磁流体力学（Magnetohydrodynamics ; MHD）が広く用いられている。（MHD は特性長をもたないため）実験室系から天体プラズマまで様々なプラズマに対しての理論的体系が MHD によって作られてきた。静的なプラズマのマクロな現象を記述するには MHD 理論は妥当であると考えられている。しかし電磁流体力学という名前にも関わらず、MHD 理論ではプラズマ流が支配的であるような運動に関して、小さな側面しか理解されていない。実際 MHD による研究の多くは静的なプラズマに関するものである。それは流れがない方が単純であるという理由からだけではなく、流れのないプラズマに対しては強力な数学的手法が存在するからである。例えば、平衡に関するグラッド・シャフラノフ（Grad-Shafranov）方程式 [1] や安定性解析に関するエネルギー原理 [2] などである。逆に言うと流れがある場合には多くの困難が存在するのである。流れのある MHD 平衡を考えると、平衡を記述する偏微分方程式は流速に応じて楕円型から双曲型へと変化することが知られている [3]。これは衝撃波の発生を示唆するが、2 次元（以上）では解の存在さえ不明である。非圧縮流を仮定することで、方程式は楕円型となるが特異点を含んでいる。これは、MHD 理論が（ポロイダル断面で）磁場を横切る流れを許さないことに起因

している。さらに流れをもつプラズマの線形安定性解析においては、作用素が非エルミートになるため、流れがない場合と異なり、モード展開による解析を行っても安定性の完全な理解を得ることはできない。またプラズマ中の複雑な構造形成には、かけ離れたスケールの運動が共存し、かつそれらが相互作用することが重要な役割を果たしていると考えられるが、MHD 方程式は特性長をもたない方程式であるため、（プラズマ領域に比べて小さな）ミクロスケールの効果を記述することは困難である。実際、コロナ加熱やリコネクション、H モード閉じ込めにおける境界層などミクロスケールの効果が重要であると考えられる現象は数多くある。

本研究ではプラズマ流の効果、ミクロスケールの効果をより詳細に研究するため二流体モデルを用いた。イオン流は（電子の質量が小さいため）近似的にプラズマ流と見なすことができ、電子は磁力線に沿って運動するため、イオン流体と電子流体を区別する二流体モデルでは一流体モデル（MHD）に比べてより広範な流れ場、磁場配位を考察することができる。電子慣性を無視した二流体モデルは以下の適切に規格化されたホール（Hall）MHD によって記述することができる。

$$n\left[\partial_t \boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right] = (\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} - \nabla p, \tag{1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \nabla\times\left[(\boldsymbol{V} - \epsilon\nabla\times\boldsymbol{B}/n)\times\boldsymbol{B}\right], \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{V}$ はそれぞれ磁場と（イオン）流速を表すベクトル場、p はプラズマの圧力、n は数密度を表す。また、$\epsilon = l_i/L_0$ で L_0 は系の特徴的な長さ、$l_i = c/\omega_{pi}$ はイオン表皮長を表す。ホール MHD 方程式とは、MHD 方程式に (2) のホール項 $\epsilon(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}$ が加わった方程式である。つまりホール項は二流体効果を表す主要項である。また微小パラメータ ϵ を係数とする方程式の最高階微分項であるホール項は、数学的には特異摂動項である。物理的には、ホール項によってイオン表皮長という特性長が MHD 方程式に導入され、マクロスケール（系の大きさ）とミクロスケール（イオン表皮長）の相互作用を記述することが可能となる。流れをもつプラズマの平衡と安定性、および波のスペクトルに対するホール効果について研究を行った。

2　流れをもつプラズマの平衡

軸対称（$\partial_\theta = 0$）な系において非圧縮流をもつプラズマの MHD 平衡方程式は

$$-\left(1-\Phi'^2\right)\mathcal{L}\Psi + \left(\frac{\Phi'^2}{2}\right)'|\nabla\Psi|^2 = F'(\Psi) + r^2 P'(\Psi), \tag{3}$$

と書ける。ここで Ψ は磁束関数、$\Phi[=\Phi(\Psi)]$ は流れ関数、$F = (1/2)[(rB_\theta)^2 - (rV_\theta)^2]$、$P = p + V^2/2$ である。またプライムは Ψ による微分を表す。グラッド・シャフラノフ作用素 $\mathcal{L} = r\partial_r r^{-1}\partial_r + \partial_z^2$ は楕円型微分作用素であるため (3) は楕円型偏微分方程式であるが、$\Phi' = 1$ のところに特異点をもつ。ポロイダル断面上で流れ場が磁場に平行でなくてはならないという MHD 方程式の制限 $\Phi = \Phi(\Psi)$ が特異点を生み出す原因となっている。

このような困難を取り除くのが特異摂動である。ホール項による特異摂動を考えるとポロイダル磁場に垂直成分をもつポロイダル流を考えることができ（流れ関数は磁気面関数でなくなる）、平衡方程式は Ψ、Φ に対する以下の２つの楕円型偏微分方程式で表される。

$$-\mathcal{L}\Psi = \partial_\Phi F(\Psi,\Phi) + r^2\partial_\Phi P(\Psi,\Phi), \tag{4}$$

$$-\mathcal{L}\Phi = -\partial_\Psi F(\Psi,\Phi) - r^2\partial_\Psi P(\Psi,\Phi). \tag{5}$$

これらは特異点をもたない楕円型方程式なので境界値問題として解くことができる。内部導体を

もつトーラス領域で (4)-(5) を解いて、二流体モデルの緩和状態と考えられている二重ベルトラミ（doble Beltrami）平衡解 [4] を得ることができる。

3 流れのあるプラズマのリアプノフ安定性解析

上述（§ 1）のように流れのある平衡の線形安定性解析では、作用素が非エルミートになるためモード展開によって完全な理解を得ることはできない。摂動が $\exp(-i\omega t)$ に比例するものとして得られる分散関係を解いて、固有値 ω が全て実数であったとしても代数的（t^n）に成長する不安定性が存在することが知られている。本研究では摂動のエネルギーに上限を与えるような運動の定数（リアプノフ関数）を見つけ、ベルトラミ場（Beltrami field）と呼ばれる流れをもつ平衡の安定十分条件（リアプノフ安定条件）を求めた。

変分によって特徴付けられる平衡（これをベルトラミ平衡と呼ぶ）については、その変分に関連して摂動に対する運動の定数を見つけることができる [5]。二次元流体、MHD、二流体 MHD 方程式では、エネルギーやヘリシティーなどの保存量 $H_i(\boldsymbol{U})$、($\boldsymbol{U}$ は流れ場や磁場）が存在する。$H_i(\boldsymbol{U})$ を組み合わせた汎関数 $G(\boldsymbol{U}) = \Sigma \mu_i H_i(\boldsymbol{U})$ （ベルトラミパラメータ μ_i は定数）の変分（$\delta G = 0$）をとることによって、緩和状態を記述する ベルトラミ平衡 ($\boldsymbol{U}_0$) を導くことができる。ベルトラミ平衡に摂動 $\mathbf{u}$ （$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0 + \mathbf{u}$）を考えると、摂動に対して $H_i(\mathbf{u})$ は定数でないが、その線形和である $G(\mathbf{u}) = \Sigma \mu_i H_i(\mathbf{u})$ が運動の定数となることが証明される。二次元中性流体、MHD ではこの運動の定数 $G(\mathbf{u})$ と強圧条件（coerciveness condition；ここではポアンカレ型の不等式で書かれる）を用いると、摂動のエネルギー $\|\mathbf{u}\|^2$ の上限が与えられる。つまり、$G(\mathbf{u})$ をリアプノフ関数として用いることができ、安定性の議論を行なうことができる。具体的にはベルトラミパラメータ μ_i と領域の大きさに依存する定数を関連付けることによって代数的不安定性、非線形不安定性も考慮した安定性の十分条件（リアプノフ安定条件）を得ることができる。ここで鍵となるのは強圧条件である。強圧条件は微分の階数で測られるので、強圧条件と運動の定数 $G(\mathbf{u})$ を用いて安定性条件を得るためには、汎関数 G の最高階微分項が正値である、つまり G が凸であることが必要となる。

しかし二流体 MHD 方程式では特異摂動の効果によって、汎関数 G の最高階微分項は正値でなくなる（汎関数 G が凸でなくなる）。つまり二流体 MHD 方程式の平衡解である二重ベルトラミ平衡の安定性解析において、$G(\mathbf{u})$ をリアプノフ関数として用いることができない。リアプノフ安定性の議論を行うためには、より高階かつ正値であるような運動の定数が必要となる。具体的にはエンストロフィー（渦度の二乗）オーダーの保存量が要求される。エンストロフィーは二次元流体の保存量であるが、三次元では対流微分項の引き伸ばし効果によって保存が破られる。二流体 MHD 方程式でも一般にエンストロフィーは保存量ではなく、それと同等の保存量も存在しない（見つけられていない）。

特殊な二重ベルトラミ平衡を考えると、摂動に対して $G(\mathbf{u})$ 以外にさらにエンストロフィーオーダーである運動の定数を見つけることができる [6]。具体的には（I）流れ場が直線で磁場がねじれてる場合、(II) 磁場が直線で流れ場がねじれてる場合、の 2 通りである。この 2 通りの場合に対しては、ベルトラミパラメータと領域に依存した定数（ラプラシアンの最小固有値）を関連付けてリアプノフ安定性条件を求めることができる。しかし一般の二重ベルトラミ平衡の安定性に関しては未解決の問題である。

4　アルフベン波とホール効果

磁気プラズマ中の代表的な MHD 波にアルフベン（Alfvén）波がある。アルフベン波は磁力線に沿って（一次元的に）伝播する。光などのような波は三次元的に伝播するので光源から遠ざかると波は広がって弱くなる。アルフベン波は、このような空間的広がりをもたないので磁力線に沿って極めて遠距離まで到達する。このような伝播方向の退化は連続スペクトルを発生する原因となる。理想 MHD 方程式では、非一様磁場中を伝播するアルフベン波は連続スペクトルをもち、固有関数は特異点をもつ 2 階常微分方程式の（フロベニウス型の）解として与えられる。しかしスペクトルの特異摂動（微分の最高階数が変化する摂動）を加えるとスペクトルに定性的な変化が生じる。具体的には散逸による特異摂動を加えると、連続スペクトルの下端点が摂動を受けて不安定なモード（この不安定性をテアリング不安定性と呼ぶ）が発生することが知られている。また電子の慣性を考慮すると、方程式に 4 階微分項が加わり特異点が取り除かれる。その結果、連続スペクトルは点スペクトルへと変化する。

ホール MHD 方程式 (1) - (2) に表されるように、MHD 方程式に特異摂動として加わるホール項がアルフベン連続スペクトルにどのように影響するか研究を行った。ホール MHD 方程式より、非一様磁場中を伝播するアルフベン波のモード方程式は低ベータ（圧力）の場合以下のように計算される。

$$\frac{d}{dx}\left(\Omega^2 - k_{\parallel}^2\right)\frac{d}{dx}g_{\perp} - k_{\perp}^2\left(\Omega^2 - k_{\parallel}^2\right)g_{\perp} - \epsilon\omega\Omega^2\left(\epsilon\omega\Omega^2 - k_{\parallel}h\right)g_{\perp} \simeq -\epsilon^2\delta^2 k_{\parallel}^2\Omega^2\frac{d^4}{dx^4}g_{\perp}. \qquad (6)$$

ここで、$\Omega^2 = \omega^2/(1-\epsilon^2\omega^2)$、$g$ は楕円偏波する摂動を表し、下付の $\parallel$、$\perp$ はそれぞれ（x に沿って非一様な）磁場に対して平行、垂直方向を意味する。また $\epsilon = l_i/L_0$ はホール効果、$\delta = C_s^2/\omega^2$（C_s は音速）は圧力あるいは音波の効果を表す。$\epsilon \to 0$ の極限で (6) は理想 MHD のモード方程式となり、$\omega^2 = k_{\parallel}^2(x)$ に特異点をもつ 2 階の常微分方程式となることが分かる。音速ゼロの極限でホール効果を考えると（$\epsilon \neq 0, \delta = 0$）、周波数シフト（$\omega \to \Omega$）、直線偏波から楕円偏波への変化が起こるが、方程式は $\Omega^2 = k_{\parallel}^2(x)$ に特異点をもち、連続スペクトルを与える。しかし、ホール効果と音波のカップリング（$\epsilon \neq 0, \delta \neq 0$）を考えると、(6) の右辺に 4 階微分項が付け足される。この特異摂動項によってモード方程式は特異点をもたない 4 階の常微分方程式となり、スペクトルは連続スペクトルから点スペクトルへと変化する。

参考文献

[1] H. Grad and H. Rubin, *Proc. of Second United Nation Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 31 (United Nation, Geneva, 1958), 190.

[2] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, and R. M. Kulsrud, Proc. R. Soc. London Ser. A **224**, 1 (1958).

[3] H. Grad, Rev. Mod. Phys. **32**, 830 (1960).

[4] Z. Yoshida, S. M. Mahajan, S. Ohsaki, M. Iqbal, and N. L. Shatashvili, Phys. Plasmas **8**, 2125 (2001).

[5] Z. Yoshida, S. Ohsaki, A. Ito, and S. M. Mahajan, J. Math. Phys. **44**, 2168 (2003)

[6] S. Ohsaki and Z. Yoshida, Phys. Plasmas **10**, 3853 (2003).