

論文内容の要旨

論文題目: Econophysical analysis of price changes
in financial markets
(金融市場における価格変動の経済物理学的解析)

氏名: 大西 立顕

1 はじめに

市場価格は激しい変動を示すことが経験的に知られているが、そのメカニズムや法則性については分かっていない。近年、コンピュータの発展により高頻度データの解析が行なわれるようになり、価格変動にはオープンマーケット特有の普遍的な統計的性質があることが明らかになってきている。これらを説明する理論的なモデルができれば、現象の本質を理解したり、予測や制御などへの応用が期待できる。これまでいろいろなモデルが提案されているが、価格変動をうまく再現できるモデルはまだない。

本研究では、確率過程の観点と仮想市場の観点から価格変動のモデルを考察し、変動のメカニズムについて理解を深める。また、マルチフラクタルの手法を用いて変動パターンを特徴づけることにより、価格変動の統計性について調べる。なお、解析には円ドルレートのティックデータ (1999年1月4日～3月12日) を用いる。

2 価格変動の統計的性質

価格差の相関は非常に短時間で0になるが、価格差の絶対値は長時間相関がある (Fig.1)。これは、価格 $P(t)$ の上下は予測困難だが、ゆらぎの幅は予測可能であることを意味し、一度大きな変動が生じると変動の大きな状態がしばらく持続する性質を表わしている。価格差の累積分布は正規分布よりもはるかに裾野が大きくべき分布に近い分布になる (Fig. 2)。このような性質はあらゆるオープンマーケットに共通する普遍的な特性であることが知られている。

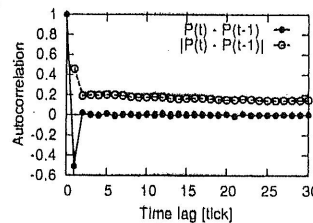


Fig. 1 相関関数.

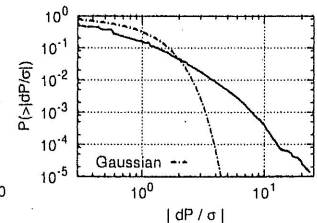


Fig. 2 価格差の累積分布.

3 確率過程によるモデル化

時系列データから得られる統計性を満たすように確率過程を構成することで、確率過程による価格変動のモデル化を行なう。

実際の多くのディーラーは移動平均価格を使ってトレードしている。また、移動平均に基づいてパラメータが変動する確率過程(自己変調過程)により、取引間隔がモデル化できることが報告されている。そこで移動平均を用いた次式の過程を考える

$$P(t) = \sum_{i=1}^n w_i P(t-i) + \epsilon(t). \quad (1)$$

重み w_i は平均 2 乗予測誤差

$$\sum_t \left((P(t) - \bar{P}) - \sum_{i=1}^n w_i (P(t-i) - \bar{P}) \right)^2 \quad (2)$$

が最小になるよう定めるものとする。ただし、 \bar{P} は $P(t)$ の平均値である。この決め方は残差 $\epsilon(t)$ が無相関になるよう定めることに対応する。

時系列データから計算した結果、重みは指数分布に近く (Fig.3), ランダムウォークとは顕著に異なることが分かった。時間スケールを変えて解析することにより、数分程度以下の短い時間スケールでは価格変動はランダムウォークから外れることが分かった。重みの分布は時間帯により異なるが、実時間でみればどの時間帯も $w_i > 0$ となるのは $i < 2$ 分程度で、これは取引間隔の解析で用いられた移動平均の幅とほぼ一致する。よって、この移動平均はディーラーの動きの特徴を捕えていると考えられる [1]。また、 $\epsilon(t)$ は無相関になるが、 $|\epsilon(t)|$ は長期相関を持ち (Fig.4), $|\epsilon(t)|$ はベキに近い分布になった。よって、価格変動の本質的特性は $\epsilon(t)$ にあると考えられる。

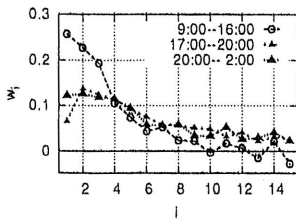


Fig. 3 重みの分布。

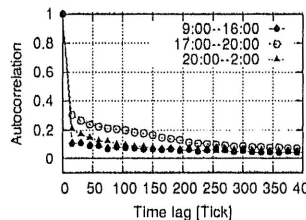


Fig. 4 $|\epsilon(t)|$ の相関関数。

$\epsilon(t)$ を符号 $\sigma(t) = \pm 1$ の項と大きさの項に分け、

$$\epsilon(t) = \sigma(t) |\epsilon(t)| \quad (3)$$

とすると、 $\sigma(t)$ はランダムに +1 か -1 を取る確率変数とみなせることが示せる。 $|\epsilon(t)|$ については次式の自己変調過程を考える

$$|\epsilon(t)| = \mu(t) \sum_{i=1}^{n'} w'_i |\epsilon(t-i)|. \quad (4)$$

重み w'_i は平均 2 乗予測誤差

$$\sum_t \left((|\epsilon(t)| - \bar{|\epsilon|}) - \sum_{i=1}^{n'} w'_i (|\epsilon(t-i)| - \bar{|\epsilon|}) \right)^2 \quad (5)$$

が最小になるよう定めるものとする。ただし、 $\bar{|\epsilon|}$ は $|\epsilon(t)|$ の平均値である。

時系列データから計算した結果、重み w'_i は裾野の大きいベキ分布になった (Fig.5)。これは価格差の絶対値の長時間相関と対応している。また、 $\mu(t)$ は無相関で (Fig.6), 累積分布は時間帯によらず指数分布に近い分布になった。よって、 $|\epsilon(t)|$ は平均値が滑らかに変動するような非定常ポアソン過程で記述できる。

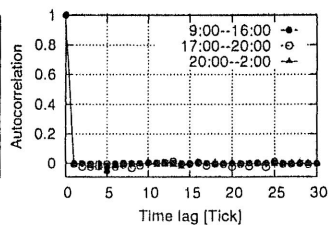
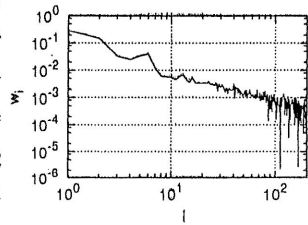


Fig. 5 重みの分布。

Fig. 6 $\mu(t)$ の相関関数。

以上より、価格変動は次式の確率過程でモデル化できることが示された

$$P(t) = \sum_{i=1}^n w_i P(t-i) + \sigma(t) \mu(t) \sum_{i=1}^{n'} w'_i |\epsilon(t-i)|. \quad (6)$$

この過程で生成される価格時系列は、価格変動の基本的性質を再現することが確認できる。よって、価格が過去の $|\epsilon(t)|$ の履歴に依存するために価格差の絶対値に長期相関が生じていること、自己変調の効果 (ランダムノイズの乗法過程) により価格差の累積分布がベキ分布になることが分かった。

4 スピンモデルによるモデル化

一人一人のディーラーの行動を想定することにより、ディーラーが多数いる市場の振舞いのモデル化を行なう。

2次元格子上にスピン変数 $S_i(t) = \pm 1$ を持つ N 人のディーラーが配置しているものとする ($i = 1, 2, \dots, N$). $S_i = 1$ は買い, $S_i = -1$ は売りのポジションを表わす。価格は需給で決まるので

$$P(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i(t) \quad (7)$$

で与えられ ($-1 \leq P(t) \leq 1$), $S_i(t)$ は確率 ρ で次のように更新されるものとする

$$S_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{with } \rho = \frac{1}{1 + \exp(-2\beta h_i(t))}, \\ -1 & \text{with } 1 - \rho \end{cases} \quad (8)$$

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) - \alpha S_i(t) |P(t)|. \quad (9)$$

ただし, β は逆温度, $h_i(t)$ はディーラー i が感じる局所場, J_{ij} はディーラー i がディーラー j から受ける相互作用の強さ, $\alpha > 0$ は global 結合の強さである。各ディーラーは4人のディーラーから影響を受けるものとし, 影響を受ける場合は $J_{ij} = J > 0$, 受けない場合は $J_{ij} = 0$ とする。一般には J_{ij} は非対称行列になる。 $h_i(t)$ の第1項は他の4人と同じポジションを取ろうとする群衆行動の効果を表わす。 $h_i(t)$ の第2項は $|P(t)|$ が大きくなる, つまり, 価格が極端に高くなったり安くなったりするとポジションを逆にしようとする効果を表わす。

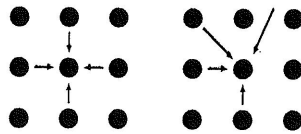


Fig. 7 Small World Network の構成.

実社会のネットワークは格子のように規則的でも, 完全にランダムでもなく, その間に属するような Small World Network で記述されることが知られている。よって, ディーラー間の相互作用も Small World Network で考える方がより現実的である。各

ディーラーが最隣接した4人のディーラーと結合を持つ規則的な状態 (Fig.7 左) から始め, 各結合を確率 p でランダムにつなぎ変える操作をすべての結合について行ない Small World Network (Fig.7 右) を構成する。パラメータ p は生成されたネットワークのランダムネスを表わし, ネットワークは $p = 0$ のとき規則的で, $p = 1$ のとき完全にランダムになる。 p に依存して, ネットワークを特徴づける経路距離 $L(p)$ とクラスターの度合 $C(p)$ は変化する (Fig.8). $L(p)$ が小さく, $C(p)$ が大きい値を取る $10^{-3} < p < 10^{-2}$ の領域で Small World の効果が顕著になる。

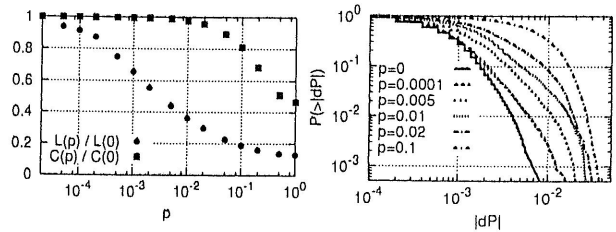


Fig. 8 $L(p)$ と $C(p)$. Fig. 9 価格差の累積分布.

数値計算 ($N = 10201, T = 1/\beta = 1.5, J = 1, \alpha = 20$) の結果 $p < 10^{-2}$ の範囲でこのモデルは価格変動の性質を満たし, Small World の効果を考慮した場合も価格変動が再現できることが示せた (Fig.9~11). また, 価格差の累積分布のベキの指数は p の値に応じて変化することが分かった。これは, p が大きくなると $L(p)$ が小さくなり, 情報が早く伝わるようになるため大きな変動が起こりやすくなることから理解できる。実際, 市場によってベキ指数が異なることが知られており, この違いはネットワーク構造の違いにより生じている可能性が示唆される。

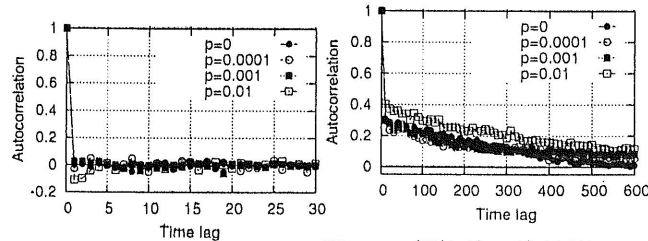


Fig. 10 価格差の相関関数.

Fig. 11 価格差の絶対値の相関関数.

5 マルチフラクタルによる解析

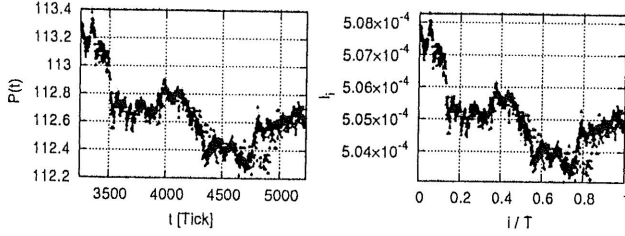


Fig. 12 価格変動.

Fig. 13 測度分布.

価格時系列を線分上の測度分布と解釈することで、変動パターンを特徴づけることができる。今、長さ T [Tick] の区間を長さ 1 の区間に規格化し、さらにその全区間を大きさ $\epsilon = 1/d$ のセルに分割する。ただし、 d は T の約数とする。セル i の測度を

$$l_i(\epsilon) = \frac{\sum_{t \in \text{セル } i} P(t)}{\sum_j \left(\sum_{t \in \text{セル } j} P(t) \right)} \quad (10)$$

とする。このとき、価格変動 (Fig.12) は長さ 1 の線分 (サポート) 上の測度 $l_i(\epsilon)$ の分布 (Fig.13) とみなすことができる。このような分布はマルチフラクタルで特徴づけることができる。

特異性指数 α と 特異性スペクトル $f(\alpha)$ は $\epsilon \rightarrow 0$ の下で次式で定義される

$$l_i(\epsilon) \propto \epsilon^{\alpha_i}, \quad (11)$$

$$N_\alpha(\epsilon) \propto \epsilon^{-f(\alpha)}. \quad (12)$$

ただし、 $N_\alpha(\epsilon)$ は特異性指数の値が α であるセルの個数である。 q 次の相関指数 τ_q は分配関数

$$Z_q(\epsilon) = \sum_i l_i^q(\epsilon) \quad (13)$$

を用いて $\epsilon \rightarrow 0$ の下で次式で定義される

$$Z_q(\epsilon) \propto \epsilon^{\tau_q}. \quad (14)$$

(11)~(14) 式より鞍点法を用いると、 $f(\alpha)$ と α は q と T の関数として次式で与えられる

$$f_{q,T}(\alpha) = q\alpha_{q,T} - \tau_{q,T}, \quad (15)$$

$$\alpha_{q,T} = \frac{d\tau_{q,T}}{dq}. \quad (16)$$

時系列データから L [Tick] 間の価格差

$$dP_L(t) = P(t+L) - P(t) \quad (17)$$

と特異性スペクトルの特徴量

$$\Delta f_{q,T}(t) = f_{q,T}(\alpha_{q,T}) - f_{-q}(\alpha_{-q,T}) \quad (18)$$

の時系列を計算し、解析した。その結果、パラメータ T, q, L の値をうまく選べば、 $\Delta f_{q,T}(t)$ と $dP_L(t)$ の散布図は一様分布から外れた偏った分布になり (Fig.14), 2つの物理量の間に関連があることが分かった (Fig.15)。これは、数時間程度の長い時間スケールでも価格変動はランダムではないことを示している。また、価格予測にマルチフラクタルの手法が有効である可能性が示唆される。

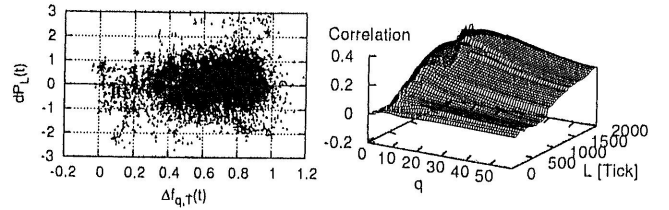


Fig. 14 散布図 ($T = 1980$, Fig. 15 相関係数 ($T = q = 8, L = 2000$), 1980).

6 まとめ

確率過程による価格変動のモデルを提案し、解析した結果、自己変調過程の機構により価格変動の累積分布がベキ分布になることが分かった。また、価格変動のスピンモデルを拡張し、解析した結果、ディーラー間のネットワーク構造によって、ベキ指数が変わることが分かった。最後に、価格変動をマルチフラクタルの手法で解析した結果、スペクトルの特徴量と価格変動との間に相関があり、長い時間スケールでも価格変動はランダムではないことが分かった。

参考文献

- [1] Takaaki Ohnishi, Kazuyuki Aihara, Misako Takayasu and Hideki Takayasu, "Statistical properties of the moving average price in dollar-yen exchange rates", Applications of Physics in Financial Analysis 4, Warsaw, 2003.