

論文内容の要旨

論文題目

Fidelity-Linearity Optimization for Bioelectromagnetic Inverse Problem

(忠実性・線形性の同時最適化による生体磁場逆問題解法)

氏名

寺園 泰

本論文は、生体磁場逆問題に対する新規な解法を提案するものである。

第1章は序論として、本論文の背景と目的を説明した。生体の無侵襲計測法として、生体外部の電位や磁場に注目する方法がある。例えば、脳神経の電氣的活動によって生じる頭部周辺の磁場を計測する MEG (magnetoencephalography) や、胸部表面で心臓の活動を対象とする MCG (magnetocardiography) などが盛んに研究されている。これらの計測に共通して問題となるのが、計測値の発生原因を推定すること、すなわち生体内の電流密度分布の推定である。この推定問題が本論文で扱う逆問題である。逆問題解法は、知りたい量に関する情報を得るプロセスを順方向写像としたとき、得た情報から未知量を推定する逆方向写像として位置づけられる。このとき、順・逆方向の写像を合成して恒等写像になるのが理想である。そこで、提案解法の目標が、恒等写像の性質の近似的な実現にあることを述べた。

第2章では、生体磁場逆問題の問題設定を行った。生体磁場逆問題は、電流密度分布自体を推定対象とする場合、計測値への伝達が線形であり、線形逆問題に分類される。電流密度分布は、各位置における値を数値計算するため、空間的に離散化して扱われる。このとき、計測値を計測値ベクトル $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ 、伝達行列を $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 、電流密度分布をソースベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ として、伝達方程式は

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x} \quad (1)$$

と表される。ここで、計測値が限られた M 個のセンサの出力値である一方、未知変数の個数 N は非常に多くなる。つまり、可能な解に大きな自由度が存在し、一意に定まらない。この状況を劣決定であるという。以上のように、生体磁場逆問題を劣決定線形逆問題として定式化した。

第3章では、すでに提案されている他の解法について述べている。

第4章では、忠実性・線形性の同時最適化の枠組みについて議論している。ここでは、計測・推定のプロセス全体を考慮した。これら2つのプロセス全体をひとつの写像と考えたとき、それは、真値に対して推定値を与える写像にほかならない。したがって、この写像は元の値を変えない恒等写像であるべきだが、ここで着目したのは、以下の2つの条件が、線形空間上の恒等写像の必要十分条件となることである。1) 基底忠実性：写像しても各元が保存されるような基底が存在する。2) 線形性：写像が線形である。これらの性質は、数学的な必要十分性からだけでなく、手法の実用上も重要である。MEGでは、電流密度分布がごく少数の電流双極子から成るという仮定がおかれることがしばしばある。基底忠実性が成り立てば、この場合に有効な推定が可能である。また、さまざまな様態の分布への対応能力は、線形性によって得られる。ところが、劣決定性のために、恒等写像そのものは実現不可能である。つまり、基底忠実性と線形性は同時に成立させることはできない。そこで、有効な逆問題解法を得るために、両性質を最大限近似的に両立させることを解法の枠組みとした。

第5章では、提案手法の詳細について述べた。まず、忠実性に関する議論を行い、基底忠実性と重みつき l_1 -ノルムの関係を明らかにした。重みつき l_1 -ノルムの最小化は、非零要素の少ない解、いわゆる疎な解を得るための方法として知られている。ここでは、重みつき l_1 -ノルムと基底忠実性について、以下の事実を証明した： 伝達行列 L の任意の2つの列ベクトルが一次独立であるなら、

$$e_i = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{i=1}^N \|l_i\|_2 |x_i| \mid L\mathbf{e}_i = L\mathbf{x} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

が成り立つ。すなわち、上記評価関数の最小化による解法は標準基底に関して基底忠実性を満たす。基底忠実性に関する既知の証明は、伝達行列の非退化性を仮定しており、本論文での証明のほうが仮定が弱い。

基底忠実性と重みつき l_1 -ノルムは、スカラ場を対象とするときは問題ない。しかし、生体磁場逆問題では、電流密度分布というベクトル場を扱うため、不都合が生じる。そこで、これに対応する拡張を導入した。まず、スカラ場における単一非零要素解、すなわち標準基底に相当する解の集合を、ベクトル場について定義した。伝達行列を、各格子点上のベクトル成分に対応するよう分割し、 $L = [L_1 \ \dots \ L_P]$ とおく。ソースベクトルをベクトル成分ごとに分割し $\mathbf{x}^T = [x_1^T \ \dots \ x_P^T]$ とおく。このとき、 $x_i \neq 0, x_{j \neq i} = 0$ であれば、この解は空間中における一点のみで非零となっている。これは、MEGでは単一電流双極子の解に対応する。このような解の全てが写像の不動点となることを、拡張基底忠実性と呼ぶ。さらに、重みつき l_1 -ノルムを拡張し、伝達行列が次の条件を満たすとき、拡張重みつき l_1 -ノルムの最小化が拡張基底忠実性を達成することを示した： 伝達行列 L の任意の2つの部分行列 $L_i, L_j (i \neq j)$ が一次独立である、すなわち $\operatorname{rank}[L_i \ L_j] = \operatorname{rank}[L_i] + \operatorname{rank}[L_j]$ であるとする。ただし、 L_i, L_j はそれぞれ最大階数をもつ。このとき、次の関数

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^P \|L_i \mathbf{x}_i\|_2 \quad (3)$$

を、与えられた計測値 \mathbf{y} についての制約 $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ のもとで最小化する解は、拡張基底忠実性を満たす。以上のような拡張により、ベクトル場における拡張基底忠実性を達成できた。数値例として、図1に、MEGの計測系を想定した電流密度分布の推定結果を示す。ベクトル場対応が有効に機能していることがわかる。

次に、線形写像と2次形式について論じた。線形写像が2次形式あるいは重みつき l_2 -ノルムの最小化により得られることはよく知られている。MEG逆問題においては、 l_2 -ノルム最小化による推定では、頭の表面、つまりセンサ付近に分布が片寄る問題が報告されている。そこで、変数を確率変数としたときの2次統計量に注目した。ソースベクトルの分散共分散行列が単位行列だと仮定する。このとき、推定値の分散共分散行列 \hat{C} は、推定に用いた一般化逆行列 G によって $\hat{C} = GLL^T G^T$ と表される。 \hat{C} の対角成分は推定量の各変数の分散を表す。これを一様に近づけるために、2次形式の重みを対角行列 W とし、 $\hat{C} = WL^T(LWL^T)^{-1}LL^T(LWL^T)^{-1}LW$ から第 i 対角成分を $w_i^{\text{new}} = w_i^{\text{old}}/\sqrt{c_i}$ なる反復によって更新していく方法を提案した。ところで、変数が標準正規分布に従う場合の最尤推

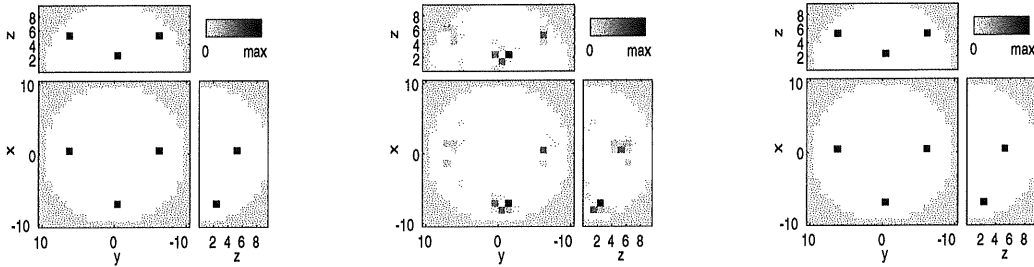


Fig. 1-a: 想定した解

Fig. 1-b: 重みつき l_1 -ノルム最小解 Fig. 1-c: ベクトル場拡張重みつき l_1 -ノルム最小解

Fig. 1: 忠実性のベクトル場拡張の効果

定は、標準基底に対する推定誤差 $\|GL - I\|_2$ を最小化する G によって得られる。しかし、前記反復により、この誤差は悪化していく。また、反復回数が多くなると、推定解の形状がゆがむ傾向が現れる。そこで、片寄りの抑制と誤差や形状の悪化を鑑みて、適当な回数で反復を打ち切る。伝達行列の性質によるが、検討範囲では数回程度の反復で十分であった。さらに、この重み設定も、ベクトル場に対応するよう拡張した。ベクトル場の場合、分散の一樣性は、次の2つの性質で考えるべきことを指摘した。1つは、各格子点間で、期待される分散の大きさが等しいこと、すなわち、

$$\langle \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 \rangle = \dots = \langle \mathbf{x}_P^T \mathbf{x}_P \rangle \quad (4)$$

である。もう1つは、各格子点上で、上記期待される分散に与える影響がベクトルの向きによらないこと、すなわち I を単位行列として

$$\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \rangle = \alpha_1 I, \langle \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T \rangle = \alpha_2 I, \dots, \langle \mathbf{x}_P \mathbf{x}_P^T \rangle = \alpha_P I \quad (5)$$

である。これらが完全に成立すると、推定分散共分散行列のブロック対角要素は、小単位行列の定数倍が一樣に並ぶ。これを実現するために、前記の反復法を拡張した。まず、重み行列 W をブロック対角行列にする。そして、推定された分散共分散行列の i 番目のブロック対角要素を、固有値分解を用いて $\hat{C}_i = W_i U_i D_i U_i^T W_i$ と表し、 $W_i^{\text{new}} = U_i D_i^{-1/2} U_i^T$ として更新する。図2に数値例を示したように、以上の提案により、2次形式の重みを効果的に設定できた。

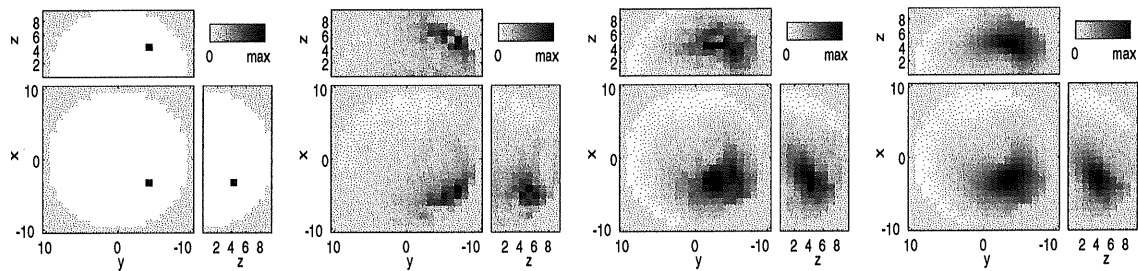


Fig. 2-a: 想定した解

Fig. 2-b: l_2 -ノルム最小解 Fig. 2-c: 重みつき l_2 -ノルム最小解 Fig. 2-d: ベクトル場拡張重みつき l_2 -ノルム最小解

Fig. 2: 2次形式の重み設定の効果

さらに、第5章では、同章で検討してきた忠実性と線形性の2つの性質を同時最適化する方法を提示している。ここまでの議論で、拡張基底忠実性には拡張重みつき l_1 -ノルムを、片寄りを補正した線形写像には重みつき l_2 -ノルムを対応付けた。これらの性質を同時に最適化するための評価関数として、2つの形式を提案した。第1に、各評価量を内分して用いる形式。第2に、FOCUSS という反復解法を参考に、重みつき2次形式の重みの逆行列内で、各評価量に対応する項を内分する形式である。

第1の形式では、最適化問題は2次計画あるいは2次錐計画問題に帰着される。雑音を考慮した制約条件の緩和を2次形式の形で導入しても同じクラスである。これは凸計画問題の一種であり、大域的最適解を求めることができる。また、内点法を用いた解法の実装が公開されており、効率よく解を求めることができる。図3の数値例のように、既存の手法と比較して、提案手法が良好な推定結果を示している。

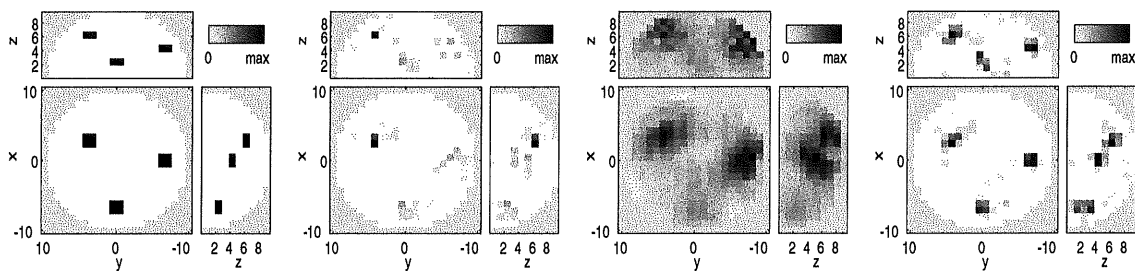


Fig. 3-a: 想定した解

Fig. 3-b: 重みつき l_1 -ノルム最小解

Fig. 3-c: 重みつき l_2 -ノルム最小解

Fig. 3-d: 忠実・線形同時最適解

Fig. 3: 提案する同時最適化の効果

第2の形式でも凸計画問題が構成されるが、その評価関数中には対数関数が現れる。基礎としたFOCUSS自体が解法手続きの表現なので、それを用いて解を求めることができる。第1の形式との比較を図4に示す。異なる性質の解軌跡を描いていることが確認できる。

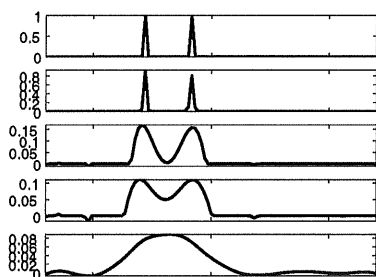


Fig. 4-a: 評価関数を内分した場合

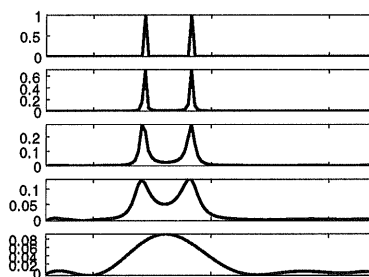


Fig. 4-b: 反復2次形式の重み行列の逆行列中で内分した場合

Fig. 4: 同時最適化形式の違いによる推定結果の比較。スカラ場。横軸はソース位置、縦軸は振幅。上段から下段へ内分比を変えている

第6章では、これまで述べてきた基底忠実性および拡張基底忠実性より強い忠実性について述べている。特に、伝達行列によって定まる疎な解の忠実性の限界と、それが対数関数を利用した評価関数によって達成されることを示した。

第7章では、これまでの議論を総括している。

以上により、劣決定線形逆問題である生体磁場逆問題に対し、基底忠実性とそのベクトル場への拡張を示し、また線形写像を与える2次形式の重みの設計とそのベクトル場への拡張を示し、さらに忠実性・線形性の同時最適化による解法を提案し、その有効性を確認した。