論文内容の要旨

論文題目: Theoretical Analysis of Stability and Structural Identifiability on Delayed Networks

(遅れ時間を持つネットワークの安定性
および構造的可同定性の理論解析)

氏 名: 宮 村 亜 位 子

1 はじめに

現実の物理現象の挙動をモデル化する際に時間遅れ要素の扱いは常につきまとう問題の一つであり、その扱いによっては構成したモデルの本質的な性質を決定することもある。無限次元システムの一つのクラスを表す遅れ時間システムは伝搬や輸送現象や人口動学を表現するものとして広く利用されてきており、経済システムにおいても意思決定とその効果の出現に時間的なずれが存在することからも時間遅れシステムと捕らえることが出来る。また、別の見方をすれば時間遅れをモデルの中に入れることによってモデルの記述を簡単化をしていることになる。一方でシステムの安定性に及ぼす遅れ時間要素の影響は、少しの遅れ時間の存在によって系の挙動が非常に複雑になるということから多くの研究者の興味を惹いてきた。つまり小さな遅れ時間が安定なシステムを不安定化する一方で大きな時間遅れが不安的なシステムを安定化することもあるからである。こういった遅れ時間を含むシステムの性質から、非常に複雑なシステムを単に遅れ時間を挿入することで簡単な記述で精度のいい近似が出来たり、巨大な次元をもつシステムを時間遅れを用いることで低次元のシステムで記述されたりもする。

遅れ時間を内在するようなネットワークの例として遺伝子ネットワークが挙げられる。ｍＲＮＡの転写や伸展過程、ｍＲＮＡの核外への輸送、たんぱく質の核内への輸送、翻訳過程など様々な遺伝子ネットワーク中の過程において無視できないサイズの時間遅れの存在が示唆されており、時間の遅れの存在によって遺伝子ネットワークの挙動が複雑化され、サーカディアンリズムのような振動現象の根本的な機構に関わっているのではないかという意見も少なくない。しかし、実際は時間遅れの影響を明確に考慮に入れた研究は非常に少なく、ほとんどの遺伝子ネットワークの設計や推定などに関する研究は時間遅れがない理想化されたモデルを用いた形で進められているのが現状である。

本研究では、このような遅れ時間を内在するようなネットワークの安定性及び構造的可同定性について理論的な解析を一般的な枠組みで行うことを目的としている。

2 遅れ時間システムの安定性解析：ＬＭＩによる手法

遅れ時間システムの安定性を解析する多くの手法が現在までに提案されている。本論文では時間空間での安定性解析の手法であるリャプノフ第二関数を用いた解析手法の中でも、リャプノフ・クラソフスキー関数を用いた安定性解析を線形不等式 (LMI) の形で表現することによって計算機で効率的に解くことができる手法の提案を行っている。遅れ時間システムの安定性に関しては遅れ時間の大きさに依存するタイプの安定性かもしくは依存しないタイプ、つまり無限大の遅れ時間も考慮に入れたような安定性の両方について議論されるが、本論文では遅れ時間の大きさの変化によって安定な状態から不安定な状態へと変化するところに興味があるので遅れ時間の大きさに依存タイプの安定性について扱う。

2.1 ロバスト安定性解析

実システムの数理モデルの記述に用いられたパラメータ値が全く正値であると断定できる場合は極めて稀である。なぜならば実システムに含まれるパラメータ値は多くの実験を経て決められた平均的な値である場合が多く、また環境の微妙な変化によってそのパラメータ値にも多少の変動が起きるからである。このようなにシステムのパラメータに不確かな要素が内在しているという状況に我々はよく遭遇する。対象となるシステムに不確かさ要素が含まれている場合、不確かさを含めた領域全てに対してシステムの安定性を保証したいという要望は自然なものであり、そういった安定性をロバスト安定性と呼ぶ。但し大抵の場合その不確かさは有限であり、その上限はある値によって抑えられる。そこで本論文では不確かさを含んだ遅れ時間線形システムとして次のものを考える：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d]x(t-h) \\
x(t) &= 0, \quad for \quad t \in [-h, 0]
\end{aligned} \tag{1}
$$

ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$ はシステムの状態変数で遅れ時間 h は既知と仮定する。行列 A、A_d は n 次元の正方行列で $\Delta A(\cdot)$、$\Delta A_d(\cdot)$ は時変な変数上の不確かさを表す実行列関数である。ここで想定する不確かさは次のような有限なノルムを持つ。

$$
\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta A_d(t) \end{bmatrix} = LF(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix}
$$

ここで、$F(t)$ は $\|F_i(t)\| \leq 1$ を満たすルベーグ可測な要素を持つ未知の時変行列関数であり、E_1、E_2、L はどのように不確かさ変数 F が行列 A および A_d にかかっているかを表す既知の実行列とする。このような遅れ時間線形システムがロバスト安定であるための条件を LMI を用いた形で与え、実際に他の手法よりもより精度が高いことを数値計算を用いて示すと供に、３つの遺伝子が側抑制しあっている遺伝子ネットワークモデルのロバスト安定性解析を行い本手法の有用性を示した。

また、遅れ時間非線形システムとして

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -(A + \Delta A(t))x(t) + (G_1 + \Delta G_1(t))f(x(t)) + (G_2 + \Delta G_2(t))f(x(t-h)), \\
x(t) &= \phi(t), \quad for \quad t \in [-h, 0],
\end{aligned} \tag{2}
$$

のようなシステムを考える。ここで、各変数に関しては線形システムの場合と同様で、$f(x(t))$ は有界かつ十分なめらかな関数であると仮定する。このような遅れ時間非線形システムに対しても同様に LMI を用いた形でロバスト安定であるための条件を導出した。

また、上の結果を遅れ時間をもつ確率微分方程式のロバスト安定解析へと拡張するため

$$
dx = \{[A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]x(t-h)\}dt
$$

$$
\begin{aligned}
& + \{[B+\Delta B(t)]x(t) + [B_d + \Delta B_d(t)]x(t-h)\}dw \\
x(t) &= \phi(t) \quad t \in [-h, 0]
\end{aligned} \tag{3}
$$

のようなシステムを考える。ここで、$x(t) \in \mathbb{R}^n$ はシステムの状態変数で遅れ時間 $h > 0$ は既知であると仮定する。$w(t)$ を確率空間上で定義されたブラウン運動とし、行列 A、A_d、B、B_d は定数行列で $\Delta A(\cdot)$、$\Delta A_d(\cdot)$、$\Delta B(\cdot)$、$\Delta B_d(\cdot)$ は実行列関数で時変な変数上の不確かさを表している。ここでは、不確かさとして

$$
\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta A_d(t) & \Delta B(t) & \Delta B_d(t) \end{bmatrix} = LF(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix}
$$

を考える。このような遅れ時間をもつ線形確率微分方程式や同様に (2) を確率微分方程式に拡張した非線形確率微分方程式に対しても LMI を用いてロバスト安定であるための条件を導出した。

2.2 連続遅れ時間付きシステムの安定性解析

これまでは離散的な遅れ時間を持つシステムのみについて考えてきたが離散的な遅れ時間は連続的な遅れ時間の近時であると考えられる。実際のシステムにおいても連続的な遅れ時間を考えなければならないケースもある。したがって、ここでは離散的な遅れ時間と連続的な遅れ時間の両方を持つようなシステムを考える。

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-h) - \int_{-\tau}^{0} B(s)x(t+s)ds - \int_{-\tau_d}^{\tau_d} B_d(s)x(t-h+s)ds \\
x(t) &= \phi(t), \quad for \quad t \in [-h, 0]
\end{aligned} \tag{4}
$$

ここで、関数 $B(s)$,$B_d(s)$ は連続遅れ時間の分布を表している。このような離散・連続時間を持つシステムが h と τ に依存した安定性を LMI を用いた形で提案し、数値計算をもちいてその有効性を示した。特に化学・生物システムに多く見られる連続遅れ時間の分布が指数分布やガウス分布の場合については適当な変数変換を施すことによって離散的な遅れ時間のみのシステムに変換できることを示した。

3 遅れ時間システムの構造的可同定性について

未知のネットワークの構造を入力信号と可観測な状態の情報を用いて推定・同定したいという要望はさまざまな場面で出てくる。特に対象となるネットワークに未知の遅れ時間が内在している場合、問題は更に複雑になる。こういった場合、対象となるネットワークの取りうる構造が同定可能である構造上の最低条件を満たしているか事前に知ることは、実際に同定を計画する際の入力位置の特定に有効である。

ここでは、未知の遅れ時間を持つ線形遅れ時間システムの可同定性について通常システムと特異システムに対して議論する。

3.1 通常システムの構造的可同定性

遅れ時間をもつシステムとして

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{r} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{l} B_i u(t-h_i), \\
x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad for \quad -\tau_r \leq \theta \leq 0,
\end{aligned} \tag{5}
$$

を考える。$x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ は状態、input $u(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ は入力を表しており、状態と入力に含まれる遅れ時間は $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r$, $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_l$ と係数行列 A_i,$i = 0, 1, 2, \ldots, r$ と B_i、$i = 0, 1, 2, \ldots, l$ は同定対象である．初期関数 $\varphi(\cdot)$ は区間 $[-\tau_r, 0]$ において十分滑らかであると仮定する。この仮定により局所可積分な入力によってシステム (5) が一意な解をもつことが知られている。システム (5) が任意の初期状態で可同定であるということは、ある制御入力 $u(t)$ が存在して適当なモデルシステムに対して (5) とモデルシステムの状態の等値が (5) とモデルシステムのシステムパラメータ及び遅れ時間の等値と等価であることと定義する。このとき遅れ時間システム (5) の可同定性はシステムの弱可制御性で示されることを紹介し、システムのパラメータの値が零かそれ以外かは分かっても正確な値は未知である場合に対して未知パラメータが取りうる集合が分かっている場合に可同定であるネットワーク構造上の最低条件を対応する有向グラフの条件として与えた。

3.2 特異システムの構造的可同定性

次により一般的な線形遅れ時間システムのクラスとしての遅れ時間記述子システム

$$\begin{aligned} F\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{r} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{l} B_i u(t-h_i) \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad for \quad -\tau_r \le \theta \le 0, \end{aligned} \tag{6}$$

がある。特に F が特異行列の場合は特異システムとよび、具体的には微分方程式と代数方程式が混合したシステムを表しており、インパルス的挙動に代表される特徴を持っている。まずは特異システム (6) で遅れ時間が入力信号にのみ存在するようなも

$$\begin{aligned} F\dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=0}^{l} B_i u(t-h_i) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

を考え、ある s が存在して $\det(sF - A) \neq 0$ を満たすとする。その時、(7) を標準形に変換する変換が存在し、その上で超関数定理を用いることによって特異的な挙動と通常の挙動を分離するといった手法で特異システム (7) の可同定性が (7) の弱 S 可制御性で示されることを導出し、通常システムの場合と同様にシステムのパラメータの値が零かそれ以外かは分かっても正確な値は未知である場合に対して未知パラメータが取りうる集合が分かっている場合に可同定であるネットワーク構造上の最低条件を対応する二部グラフの条件として与えた。与えられる条件は遅れ時間を含む巨大ネットワークの可同定性を計算機で多項式時間内に検査できるものであるため実システムへの応用に適しているといえる。また同様にしてより一般的なシステムである (6) に対してもいくつかの場合に分けその可同定性についての条件を与えた。