論文審査の結果と報告

論文題目： **Orthogonally equivariant estimation of the variance-covariance matrix of a normal distribution**

題目和訳： 正規分布の分散･共分散行列の直交共変推定

氏名： 椎名　洋

［論文の内容］

本論文は、多変量正規分布の分散・共分散行列、あるいはその逆行列の推定問題に関して、直交共変な推定量に的を絞り、統計学的決定理論の立場から行われ、英文論文として発表された一連の研究成果をまとめたものである。本論文は、以下のように構成されている。

各章の内容を要約・紹介すると次のようになる。

第１章では、統計的決定理論の基本的な考え方・用語を解説しつつ、多変量正規分布の分散・共分散行列の直交共変推定という本論文の主題と関連した、幾つかの歴史的に重要な推定量を紹介している。推定問題での統計的決定理論の基本的な考え方は以下の通りである。

(1) 推定量は、損失関数の期待値であるリスクの大きさによって、評価される。推定量Ａが常に推定量Ｂのリスクを下回るときに、推定量Ａは、推定量Ｂを「優越」するという。他の推定量に優越されてしまう推定量は、使う意味がないが、これを「非許容的」という。損失関数には、尤度損失関数と２乗損失関数の２つがもっとも良く使われる。

(2) ある推定量のグループが、グループ外のどんな推定量に対しても、それを優越するような推定量をその内に含むとき、そのグループは「完備類をなす」という。完備類が分かれば、その中から推定量を選べばよいので、便利である。

(3) 各推定量の最大リスクは、その推定量の脆弱さを示すものであるが、全ての推定量の中で、最大リスクが最小になるものを、「ミニマックス」推定量と呼ぶ。

また、歴史的に重要な推定量のグループとして、次のようなものがある。

(A) 「三角共変」という性質を満たす推定量のグループ。歴史的には、このグループの中で「最良な」推定量、すなわち他の全ての三角共変な推定量を優越する推定量（最良三角共変推定量と呼ぶ）を導出することが、大きな研究の端緒となった。最良三角共変推定量はミニマックスであることが知られている。

(B) 直交共変」という性質を満たす推定量のグループ。推定量を使う立場からは、直交共変という性質は自然であるが、残念ながら最良三角共変推定量は、この性質を満たしていない。従って、直交共変でなおかつ最良三角共変推定量を優越する（従ってミニマックスな）推定量を求めることが重要な課題となった。

第２章以降が、椎名氏の研究成果をまとめたものである。第２章は、直交共変な分散・共分散行列推定量の持つべき望ましい性質としての「順序保持性」を扱っており、、Sheena and Takemura (1992) の論文の内容が収められている。直交共変な推定量の固有根がある一定の順序を保持することは、自然に思われる。実際、順序を保持する推定量がそうでないものより優れているのではないかという予想は 70 年代からあり、いくつかの論文で順序を保持する推定量が取り上げられてきたが、理論的な裏づけは存在しなかった。この章では、このことを尤度損失関数に関して理論的に証明した結果を与えている。具体的には、どんな順序を保持しない推定量も、順序統計量、または単調回帰を用いることで順序を保持する推定量に改良できること、この改良した推定量が元の推定量を優越することを証明した。つまり、順序を保持する推定量は、直交共変な推定量の中で、完備類をなすわけである。

第３章は、第２章と同じ問題を分散・共分散行列の逆行列の推定問題について扱った研究の成果であり、Sheena (2002) の論文の内容が収められている。分散・共分散行列そのものの推定量と同様に、逆行列の直交共変な推定量においても、その固有根がある一定の順序を持つことは自然である。従って、この問題でも順序を保持する推定量のグループが完備類をなすと予想されるが、これを２次元と３次元の場合に、尤度損失関数に関して椎名氏が証明したのがこの章の内容である。技術的な難しさから、残念ながら、一般次元での証明は得られていない。

第４章は、やや技術的な内容の章であるが、「リスクの不偏推定量」を扱う。リスクの不偏推定量は、リスクと常に同じ平均を持つような統計量であり、重要なのは、未知の分散・共分散行列に依存しない点である。リスクの不偏推定量が得られれば、これ

をなるべく小さくすることで、よい推定量が得られるので、推定量の開発において極めて重要な道具である。分散・共分散行列の推定量のリスクの不偏推定量は、既に 70 年代後半に得られていたが、どんな推定量に公式が適用可能であるかがはっきりしないという難点があった。椎名氏は、論文 Sheena (1995) の中で、直交共変な推定量に限定すれば、非常に簡便な方法で、リスクの不偏推定量が得られることを示したが、その結果がこの章の内容である。この方法では、推定量に求められる条件が明示的に得られるために、公式の適用が楽になる。

第 5 章は、先に述べた、直交共変でありなおかつ最良三角共変な推定量を優越する推定量に関する研究成果であり、Sheena (2002, 2003) の内容が収められている。80 年代にこのような推定量は、分散・共分散行列の推定で尤度損失関数を使った場合に、見出された。そこからの類推で、同種の推定量が、2 乗損失関数の場合、あるいは、逆行列の推定に関しても、最良三角共変推定量を優越するはずだという予想がなされてきた。この予想は、90 年代初頭に、逆行列の推定で尤度損失関数を用いた時に成立することが、2 次元の場合に証明された。この章では全く違った方法で、同じ問題を 3 次元の場合に証明した。また、分散・共分散行列の推定で 2 乗損失を使う場合の証明を 2 次元の場合に行った。残念ながら、一般次元での証明はまだ得られていない。

第６章は、母集団分散・共分散行列の固有根が無限に発散した場合の、標本行列値統計量の極限分布、及び推定量の挙動に関する研究成果であり、論文 Takemura and Sheena (2002) の内容が収められている。ここでは、

(1) 標本の固有ベクトルが、母集団のそれに確率収束すること、

(2) 標本の固有値が、確率的に発散すること、

という結果が示される。さらに通常の漸近論での１次の結果に対応するものとして、

(3) 基準化された固有ベクトル・固有値が独立に正規分布・カイ２乗分布に収束すること、

という結果が述べられている。さらに、

(4) 母集団固有根が十分に発散した場合の推定量のミニマックス性 (tail minimaxity)に関する十分条件の導出

がなされている。(4) の結果は、第５章でふれた最良三角共変な推定量を優越する、あるいはそう予想される直交共変な推定量が、母集団固有根が拡散した場合の唯一の合理的な推定量であることを示している。

第７章では、第６章の議論をさらに高次の場合に拡大した時の研究の結果であり、Sheena and Takemura (2002) の内容が紹介されている。ここでは、ひとつのパラメータ(z)で表現される直線的な母集団固有根の発散を考え、ｚの一次項がどうなるかを求めている。第６章の(1)、(2) に対応した結果として、それぞれの収束先の近傍に収まる確率を展開した時、一次の項は消滅するという結果が示されている。また、第６章の (3) に関しては、漸近分布の分布関数を一次の項まで漸近展開して、一次の項がどうなるかを導出した。推定量の挙動に関しては、スケール不変な直交共変推定量に関して、tail minimax であるためのさらに詳しい十分条件を求めている。(3) の応用として、今まで不明だった Stein と Haff の推定量のミニマックス性に関して、それらがミニマックスでないことを証明している。

[評価]

第２章以下、各章の結果の評価については、以下の通りである。

第２章の「順序保持性」については、長らく直交共変な推定量の望ましい性質として認識され、シミュレーションでも確認されてきたが、理論的にこれを証明した論文はこれまで無かった。その点で、画期的な論文であり、尤度関数を用いて分散・共分散を

推定する場合に関しては、極めて明瞭な形で問題の決着を見た点で大きな評価に値する。

第３章は、第１章の問題を逆行列の推定に関して扱ったものであるが、技術的な困難さは、第１章のそれよりはるかに高い。３次の不変測度上での計算ですら、膨大な計算とそれを簡素化するためのアイデアを必要とする。その点で、一般次元の証明にはまだ道が遠いとは言え、とりあえず３次元まででではあるが、未解決の問題に成果を出したものとして評価に値する。

第４章の内容は、技術的な結果であり、直接統計の応用に役立つというよりも、証明のためのテクニックである。しかし、このテクニックは、リスクの不偏推定量の導出だけでなく、同種のさまざまな問題に適用可能なアイデアを含んでおり、その点で評価に値する。

第５章は、これまでこの分野で長らく真偽が不明であった、ある推定量のミニマックス性に関して、初めて結果を出したものであり、その点で評価に値する。それぞれ、２次元、３次元という低次元の結果に関する内容であり、さらに高次元につながる内容かという点では疑問だが、非常に複雑な計算に取り組み、不変測度上での積分に関して、いつくかの工夫をこらして結果を得た点は優れている。

第６章は、従来全く考えられていなかった視点からの研究成果であり、正規分布の分散・共分散行列の推定のみならず、さまざまな検定、あるいは他の多変量分布への応用が期待される。ひとつひとつ丁寧に計算された結果も、非常に興味深いものがあり、本論文の研究テーマとなっている直交共変推定量の合理性がクローズアップされている。以上の点で、高く評価されるべき内容となっている。

第７章は、第６章の高次への拡張であるが、計算の複雑さがいっそう増しており、この計算を遂行し、第６章の結果をさらに発展させたものとして評価される。特に、従来この分野でよく知られた推定量に関して、はっきりとミニマックスでないことを証明したのは、優れた成果である。

以上、見てきたように、本論文は多変量統計的決定理論の分野において、多くの新しい結果を含むものであり、審査委員会は申請論文が博士（経済学）の学位にふさわしいものであると判断する。

2004 年 2 月 6 日

審査委員：　久保川達也（主査）
国友直人
矢島美寛
竹村彰通
大森裕浩