論　文　の　内　容　の　要　旨

論文題目　Zero Determination of Algebraic Numbers using Approximate Computation and its Application to Algorithms in Computer Algebra
近似計算を用いた代数的数のゼロ判定法と数式処理アルゴリズムへの応用

氏　　名　関川 浩

本論文では, 近似計算の一種である区間計算および, Mahler measure と呼ばれる代数的数の measure の評価を用いて代数的数の計算を行う方法を提案し, この方法によって, 与えられた代数的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に加減乗算を施して得られた結果が 0 か否かを厳密に判定できることを示す. なお, 本論文は, [1], [2], [3] に基づくものである.

代数的数の計算を正確演算により厳密に行うことは可能であるがコストがかかる. そこで, 効率のよい近似計算を利用しようと考えるのは自然である. 本論文では, 近似計算として, 数値計算の一種で単純な浮動小数計算よりも誤差解析が容易である区間計算を用いる. 代数的数の数値計算を行うため, $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$ に埋め込み, 代数的数 α の値は, この埋め込みにより α を複素数と見たときの数値のこととする. さらに, 入力される代数的数 α_i は, α_i を根とする $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ および, $f_i(x)$ の根のうち α_i のみを含む区間の対として与えられているものとする.

一般に, 正確演算に基づいたアルゴリズムをそのまま近似計算で実行すると, 近似の精度をいくら高めても真の出力に収束するとは限らない. この性質を不安定性という. 簡単のため, 以下, 加減乗算と等号判定 (実の場合は符号判定も含む) による条件分岐のみからなるアルゴリズムを考える. 加減乗算は連続であるが, 等号判定は等号が成り立つ点で不連続であり, 判定結果により以降の計算の道筋がまったく変わってしまう. すなわち, 不安定性は, もっとも単純化すれば, 計算結果が 0 か否か, という形で起こる. この問題をゼロ判定問題という.

白柳は, 可換環のイデアルの Gröbner 基底を求める Buchberger のアルゴリズムを安

定化する手法を提案した．その手法は，アルゴリズムの構造はそのままとし，区間計算を用い，「ゼロ書き換え」という規則を適用する．ゼロ書き換えとは，計算の途中で 0 を含む区間が現れたら，それをただ一点 0 に書き換えるという規則である．この手法は，入力とアルゴリズム中の近似計算の精度をいくらでも上げられるならば，出力は真の出力に収束し，さらに，ある有限精度から先では常に出力が妥当となることが証明されている．妥当とは，与えられた入力に対してアルゴリズムを実行したときのすべてのゼロ書き換えが正しい，すなわち，0 を含む区間は，正確演算で実行すれば 0 となる値である，ということである．この手法の根底にあるアイディアは白柳と Sweedler により一般化され，代数的アルゴリズムの安定化理論となった．

ただし，この手法には課題もある．すなわち，妥当な出力を得るにはどの程度の精度が必要か，あるいは，ある精度での出力が妥当か否かをいかに判定するか，という問題である．今，ゼロ書き換えなしで計算があるところまで進んだとせよ．この時点での計算の途中結果の区間 I が 0 を含まなければ，対応する計算を正確に行なったときの真の値 α は 0 ではない．しかし，もし，I が 0 を含めば，$\alpha = 0$ か否かは，この区間計算の結果のみからは判定できない．なぜならば，$\alpha \neq 0$ であっても，精度が不十分であれば $0 \in I$ となり得るからである．これは，先に述べたゼロ判定問題である．

そこで，このゼロ判定問題を解決する手法を提案するのが本論文の目的である．代数的数 α が，与えられた代数的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の間の加減乗算の結果であるとしたとき，「$|\alpha| < \varepsilon$ ならば $\alpha = 0$」を成立させる $\varepsilon > 0$ を見出すことができる，というのが提案する手法の要点である．このような ε を α の分離限界と呼ぶ．

定理 1 (ゼロ判定の原理) 代数的数 α の分離限界 ε と，α を含む区間 I がわかっているとせよ．(1) $0 \notin I$ ならば $\alpha \neq 0$ と判定でき，(2) $0 \in I$，かつ，I が 0 を中心とする半径 ε の円の内部に含まれるならば $\alpha = 0$ と判定でき，それ以外の場合は，(3) α のゼロ判定にはさらに精度を上げることが必要であることが分かる．そして，精度を上げて計算を繰り返せば，必ず (1) か (2) の状態に到達する．

分離限界を見つけることは可能である．なぜならば，原理的には，α を根とする $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ は，与えられた代数的数 α_i の情報から構成できるからである．しかし，f を計算するにはコストがかかる．そこで，f を計算することなく ε を見出す一般的な枠組を提案し，代数的数 α の Mahler measure $M(\alpha)$ を利用することによりそれが実現できることを示す．

代数的数 α に対し，その整数係数の原始的な最小多項式を

$$\sum_{i=0}^{d} a_i x^i = a_d \prod_{i=1}^{d} (x - \alpha_i) \qquad (a_d \neq 0)$$

としたとき，Mahler measure は，

$$M(\alpha) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}$$

で定義される．さらに，二つの measure M_0, M_1 を，

$$M_0(\alpha) = |a_d|, \qquad M_1(\alpha) = \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\},$$

と定義し，M を M_0 と M_1 の積に分解しておく．

以上の準備のもとに主結果を述べる．

定理 2 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$K_0 = K \cap \overline{\mathbb{Q}}$ とする．

1. X を K_0 上定義された述語の集合とする．X に対し，我々は以下のことを知っているものとする．

   (a) 代数的数 α が，α を根とする $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ および，$f(x)$ の根のうち α のみを含む区間の対で与えられているとき，α が満たす述語 $\xi \in X$ を見出す方法，

   (b) 代数的数 α, β がそれぞれ述語 $\xi, \eta \in X$ を満たすとき，$\alpha * \beta$ $(* \in \{+, -, \times\})$ が満たす述語 $\zeta \in X$ を ξ, η から見出す方法，

   (c) 代数的数 α が述語 $\xi \in X$ を満たすとき，α に対する分離限界を見出す方法．

   このとき，$\alpha \in K_0$ が $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K_0$ から加減乗算により得られ，各 α_i に対し，α_i を根とする $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ および，$f_i(x)$ の根のうち α_i のみを含む区間の対で与えられているとき，α に対する分離限界を計算できる．

2. 「$\deg \alpha \leq d$ かつ $M(\alpha) \leq A$」，ただし，$d \in \mathbb{N}$, $A \geq 1$, という述語全体からなる族を Y とする $(\deg \alpha = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}])$．このとき，$Y$ は 1 の三つの条件を満たす．

3. 「$\deg \alpha \leq d$ かつ $M_0(\alpha) \leq A_0$ かつ $M_1(\alpha) \leq A_1$」，ただし，$d \in \mathbb{N}$, A_0, $A_1 \geq 1$, という述語全体からなる族を Y とする．このとき，Y は 1 の三つの条件を満たす．

4. 「$\deg \alpha \leq d$ かつ $M_0(\alpha) \leq A_0$ かつ $M_1(\alpha) \leq A_1$ かつ $\alpha \in I$」，ただし，$d \in \mathbb{N}$, A_0, $A_1 \geq 1$, I は区間，という述語全体からなる族を Y とする．このとき，Y は 1 の三つの条件を満たす．

Mahler measure の性質より定理 2 の第 1 項が証明される．第 2 項は，代数的数 α, β に対し，$M(\alpha * \beta)$ $(* \in \{+, -, \times\})$ を $M(\alpha)$, $M(\beta)$ を用いて評価する，すでに知られている不等式を用いて証明される．さらに，M_0, M_1 それぞれについての同様な不等式を二通り示すことにより第 3 項，第 4 項が証明されるが，新しく証明された不等式は，元の Mahler measure に関する不等式を改良したものになっている．なお，そのうちの一つは，α, β の近似値を用いる．

以上の枠組を実際のプログラムに適用するために，(1) 区間計算と Mahler measure の計算を同時に行う方法と，(2) 計算履歴を保存しながら区間計算を行い，ゼロ判定の必要があるときのみ Mahler measure の計算を行う二つの方法を提案し，実際に計算幾何学のアルゴリズム (二次元の凸包構成) に適用した実験結果も示す．

参考文献

[1] H. Sekigawa, *An interval arithmetic with algebraic complexity to determine the signs of algebraic expressions*, Abstracts of the 4th International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA'96), p. 43, 1996.

[2] H. Sekigawa, *Using interval arithmetic and polynomial norms to determine signs of algebraic numbers*, Proc. 1996 Asian Symposium on Computer Mathematics, pp. 43–53, 1996.

[3] H. Sekigawa, *Using interval computation with the Mahler measure for zero determination of algebraic numbers*, Josai Information Sciences Researches, **9**(1), pp. 83–99, 1998.