

論文審査の結果の要旨

氏名 関川 浩

近年、コンピュータの性能が上がり、単純な数値計算だけでなく数式を扱うような代数的な問題にも有効に活用されるようになってきている。このような場合は、数式は有理数を係数とする多変数の多項式や有理関数などの枠組みで扱って、厳密な計算を行う数式処理が用いられる。特に数学における基本的な概念である環のイデアル計算を数式処理で扱うには、イデアルを一意的に表現するため Gröbner 基底が用いられ、その基底を元に計算が行われる。この Gröbner 基底を求める基本的手法は、Buchberger のアルゴリズムとして知られている。

一方、複雑な問題に対して数式処理で厳密な計算を行うには、大変コストがかかり、アルゴリズムとしては正しくても、数理的な問題に適用するには実用的でないことが多く起こる。そのため、数を厳密な表現でなく、近似値で置き換え、必要に応じて精度を上げることが考えられる。しかしながら、式の値が正負や零になるのに応じた条件分岐があるアルゴリズムでは、判定結果によって以降の計算が全く変わってしまうので、厳密な計算に基づいたアルゴリズムにおいて近似計算を行うと、近似の精度を高めていっても真の値に近づくとは限らない、という不安定性が起こり得る。この安定性は、計算結果が 0 か否か、というゼロ判定問題に帰着される。

白柳は、近似計算を用いた Buchberger のアルゴリズムを安定化するため「ゼロ書き換え」という手法を提案した。これは、アルゴリズムは変えずに誤差を考慮した区間計算の途中で 0 を含む区間が現れたらそれを 0 に置き換える、というものであり、近似計算の精度をいくらでも上げられるなら、正確な計算を行った結果に収束することが証明されている。このアイデアは、白柳と Sweedler により一般化され、代数的アルゴリズムにおける安定化理論となった。

この安定化理論を現実の問題に適用するにおいて、区間をどのように取ればよいか、すなわち近似の精度がどの程度であれば、ゼロ判定が正しいか、ということを与えることは別の問題として考えなくてはならない。

この論文では、複数の代数的数に四則演算を施したとき、すなわち整数係数の 1 変数多項式の根として具体的に指定した複数の数に対して四則演算を行ったとき、その結果のゼロ判定問題に対し、「ゼロを含むある区間 I に近似値が入っていれば、実際には 0 である」という区間 I を具体的に与える手法、すなわち、分離限界を求めてゼロ判定を近似計算で行う手法を与えた。その概略は以下の通りである。

代数的数 α に対し、その整数係数の原始的な最小多項式を

$$\sum_{i=0}^d a_i x^i = a_d \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i)$$

とすると、 $M_0(\alpha) = |a_d|$, $M_1(\alpha) = \prod_{i=1}^d \max\{1, |\alpha_i|\}$ とおいたとき、

$$M(\alpha) = M_0(\alpha)M_1(\alpha)$$

を Mahler measure と呼ぶ。代数的数 α_j の演算の結果は、代数的数となり、演算を行った結果の数 γ の Marler measure $M(\gamma)$ を、元の Mahler measure から $M(\gamma) < L$ のように具体的な数 L で評価することによって、「 $|\gamma| < \frac{1}{L}$ ならば $\gamma = 0$ が結論できる」という原理を用いる。

本論文では、代数的数に対し、誤差の範囲を込めた区間と Marler measure の組を考え、それらの和、差、積の結果の数に対する区間と Marler measure の評価式を与えることにより、実際の計算に適用できる手法を提供した。また、計算のコストを下げるため、知られている評価式の改良もなされている。

Galois の意味で解けないただ 1 つの実根を持つ 3 つの 5 次方程式を与え、それらの実根の間に成り立つ 2 次の関係式を証明する問題、2 次の無理数で座標が与えられた平面上の多数の点の凸包を求める問題などに、この手法を応用し、この手法の有効性を明らかにすると共に、計算コストの評価に役立つ結果が得られている。前者に対してはこの論文による手法を用いない場合は、複雑な数式処理を行う問題となる。

論文提出者は、本論文で「代数的数の演算のゼロ判定問題に近似計算を用いる」という斬新なアイデアを初めて打ち出し、その手法を開発した。これは計算機科学における新たな方向性を示した先駆的なアルゴリズムであり、応用上も重要である。よって、論文提出者関川浩は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると判断した。