審査の結果の要旨

論文提出者氏名　　青木　敏

分割表データに対する統計的推測は，伝統的に漸近分布論に頼る方法が主流である．例えば，尤度比検定統計量のカイ二乗近似や，最尤推定量の正規近似などは分割表データの解析において幅広く用いられている．一方，分割表データ解析における特有の問題として，十分大きい標本が得られない場合，あるいは，標本サイズはある程度大きくても観測度数が疎な高次の分割表となる場合には，漸近分布論の当てはまりは必ずしも良くないことが知られている．そのため疎な分割表が観測されることの多い臨床医学研究などでは，漸近分布論に頼らない解析手法が必要となる．本論文では，以上のような状況を念頭におき，漸近分布論に頼らない分割表解析手法のいくつかの既存研究に対し，改良と新たな諸結果を与えている．

漸近分布論に頼らない分割表解析の手法は，歴史的には，R. A. Fisher によって提案された 2×2 分割表の正確検定が最初であり，それ以降，一般の 2 元分割表，さらには 3 元以上の高次分割表の統計的推測問題においても，正確法が提案されている．正確法の研究の流れについては本論文の第一章で簡単に概観されている．

本論文の第二章では，正確法の手法を扱ったいくつかの既存の研究に対し，その改良と新たな提案が示されている．本論文の第三章では，標本空間の列挙が不可能な場合を対象にし，マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて正確法の近似を行なう際のマルコフ基底の構成について，新たな理論的諸結果が与えられている．以下第二章および第三章について概要と評価を述べる．

第二章で扱われている正確法においては，十分統計量の値が所与の標本空間の要素をいかに効率的に列挙して有意確率の正確な計算を行なうか，が重要な課題である．1983 年に Mehta と Patel によって提案されたネットワークアルゴリズムは, 一般化フィッシャー正確検定の有意確率の計算アルゴリズムであり，現在最も広く用いられている正確計算アルゴリズムのひとつである．ネットワークアルゴリズムは，分割表のセル頻度を列ごとに順次条件付け，残りの部分分割表に対する統計量の値の最大値，最小値を評価することにより，標本空間を効率的に縮小（枝刈り）するものである．本論文では，この最大化問題の最適解に対する連続緩和問題の近似最適解を求めることにより新たな上界を提案し，その性質を調べるとともに，提案する手法によってより効率的に枝刈りが行なわれることを，数値計算によって確認している．

さらに，本論文で提案された上界は，類似の任意の正確検定に対応する最適化問題に適用可能である．本論文では，集団遺伝学において重要な役割を持つ，ハーディー・ワインバーグ平衡仮説の正確検定を取り上げ，有意水準の正確計算のためのネットワークアルゴリズムを定式化し，その最大化問題の上界評価として上と同様の手法を適用し有効性を確

認している．

第三章では， ネットワークアルゴリズムのような効率的な正確計算アルゴリズムの構築が困難な問題に対して有効なマルコフ連鎖モンテカルロ法が扱われている．パラメータに対数線形性を仮定した階層モデルの中で，分解可能でないモデルの帰無分布からの直接のサンプリングは，一般には容易でない．また，マルコフ連鎖モンテカルロ法のための連結なマルコフ連鎖の構成も困難である．分解可能でないモデルの最も簡単な例は，3 元分割表における無 3 因子交互作用モデルであり，この場合においても，すべての 2 次元周辺度数が任意に固定された 3 元分割表の空間に,連結なマルコフ連鎖を構成するのは容易でない．

連結なマルコフ連鎖はマルコフ基底を構成することによって実現される．マルコフ基底の構成問題は，Diaconis と Sturmfels の 1998 年の論文で定式化された．彼らは，多項式環上のあるイデアルの生成系がマルコフ基底に対応することを示し，マルコフ基底の構成のためにグレブナ基底を求めることを提案した．この結果により，計算時間の問題を無視すれば，既存の代数計算アルゴリズムによって，理論上は任意のサイズの問題に対するマルコフ基底が求められることとなった．しかしこの代数算法には，計算時間が現実的でないという問題に加え，被約グレブナ基底がマルコフ基底としての冗長な出力を数多く含むこと，などの問題点がある．特に，計算時間の問題は重要であり，現実的に実行可能な問題のサイズは，かなり小さなものに限られてしまう．

これに対し本論文では，いくつかの問題に対するマルコフ基底を，代数算法を用いずに膨大な場合わけにより導出した結果を示している．また，マルコフ基底の極小性とその一意性に関するいくつかの結果も導出している．まず応用上重要な 2 次元周辺度数が固定された 3 元分割表の空間に連結な連鎖を構成する，という問題が扱われており，各軸の水準数が比較的少ない場合として $3\times4\times K$, $4\times4\times4$ 分割表に対する極小基底の具体形を導出している．また本論文では，得られたマルコフ基底の膨大なリストを与えており，3 元分割表解析のさまざまな問題に対して幅広く適用されることが期待される．さらにこれらの結果は，計算代数学においても興味深い問題のひとつとして捉えられており，本論文が，統計学と計算機代数学の橋渡しとなることも期待される．さらに，理論面での結果として，極小マルコフ基底の構造と，極小マルコフ基底が一意的に存在するための必要十分条件，および，各軸における水準の入れ替えを対称群の作用として定式化したときに，群の作用に関するマルコフ基底の不変性と，不変極小マルコフ基底の構造，不変極小マルコフ基底が一意的に存在するための必要十分条件，など多くの新たな理論的諸結果を与えている．

以上の諸結果は数理情報工学の発展に大きく寄与するものであり高く評価できる．

よって本論文は，博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる．