

論文の内容の要旨

論文題目 射影行列による膜面構造のリンクリング解析に関する研究

氏名 秋田 剛

本研究は、射影という概念を用いて、線形代数的な視点から張力場理論に基づくリンクリング現象を捉えたものである。このような視点に立ち、膜面の歪みを射影行列により、歪みエネルギーに寄与する部分と、寄与しない部分に分解して表現することが可能となった。このうち、歪みエネルギーに寄与しない部分は、張力場理論特有のものであり、リンクル歪みと呼ばれる。このときの歪みの分解表現から、リンクリング状態の膜面で成立する歪み・応力関係を表す弾性マトリクスが、射影行列と通常の弾性マトリクスの積により表されることを示した。本研究では、このような歪み・応力関係を表す弾性マトリクスを修正弾性マトリクスと呼ぶ。本研究で提示する修正弾性マトリクスは、物理的な解釈が明瞭であり、また既存の有限要素解析コードへの組み込みが容易である。実際の有限要素解析のために、埋め込み座標系を用いた Total Lagrange 法による定式化を行い、射影行列により得られた修正弾性マトリクスを、テンソルの成分変換式により適用する手順を示した。このとき、リンクルを考慮した有限要素解析の際に問題となる接線剛性行列の特異性について説明し、その回避方法を示した。また、以上のような射影という概念を、膜面構造の設計に利用することを考え、リンクルの強度に関するポテンシャル量をリンクル歪みにより定義し、その感度評価式を、射影行列を用いて表した。このような感度評価式から、膜面構造の設計変数がリンクルの強度に与える影響を、定量的に知ることが可能となった。

以下に本研究で得られた具体的な成果について記述する。

(1) 射影行列による歪みの分解表現と修正弾性マトリクス

張力場理論では、リンクリング状態にある膜面において、図1のような一軸引き張りの応力場が形成されると仮定する。本研究では、このような状態にある膜面の変形を、図2に示すような仮想的な変形プロセスの重ね合わせから成り立つと考えた。図中の変形プロセスAについては、通常の平面応力問題に従った引張変形を表し、変形プロセスBについてはリンクルの発生に伴う収縮変形を表すものとする。張力場理論では、曲げ剛性が零の理想的な曲面を想定するため、変形プロセスBの前後で歪みエネルギーが変化しないと仮定する。

それぞれのプロセスに対応する歪みを求め、図3左図の ϵ_1 - ϵ_2 主歪み平面に示すような歪みの分解表現を得た。赤い矢印がプロセスAに対応し、青い矢印がプロセスBに対応する。これらの和として、リンクル形成後の膜面の歪みが黒い矢印として表される。このうち、プロセスBの前後で歪みエネルギーが変化しないことから、左図の青い矢印に対応する歪みは応力変化を生じない特殊な歪みとなり、一般にリンクル歪みと呼ばれる。このような歪みの分解表現を考えると、リンクリング状態にある膜面の歪み・応力関係は、左図の赤い矢印に対応する歪みに通常の弾性マトリクスが作用し、右図の σ_1 - σ_2 主応力平面に示す赤い矢印のような、一軸引き張り応力が生じるものになると考えられる。

本研究では、線形代数的な視点に立ち、図3左図における歪みの分解表現を、射影行列により表した。ここで射影行列としては、黒い矢印に作用し赤い矢印が属する部分空間への射影を生じる行列を用いた。本研究では、図4に示すような射影行列と通常の弾性マトリクスの積からなる、修正弾性マトリクスを求めた。図から、修正弾性マトリクスは、はじめに膜面の歪み（左図の黒い矢印）に含まれるリンクル歪み（左図の青い矢印）を射影行列により除去し、その後の歪み（左図の赤い矢印）に対して通常の弾

性マトリクスを作用させて、膜面の一軸引き張り応力（右図の赤い矢印）を生じるような行列となっていることがわかる。

修正弾性マトリクスは、一軸引き張り応力の主方向を変数として含み、非線形を有する。このことから、実際の有限要素解析においては、増分型の線形化された修正弾性マトリクスが必要となる。本研究では、増分型の修正弾性マトリクスを導出し、その成分を陽に示した。ここで示された成分は、従来のリンクリング解析に用いられているものと、剪断成分が異なるのみであり、簡明な表現となっている。

(2) 修正弾性マトリクスによるリンクリング解析の定式化

埋め込み座標系を用いた Total Lagrange 法により膜要素を定式化した。このとき、埋め込み座標系と膜面の主軸座標系とのテンソル成分変換式を求め、修正弾性マトリクス成分を有限要素法に組み込み手順を説明した。また、リンクリング解析の際に問題となる接線剛性行列の特異性について、解析初期において幾何剛性が零となるために生じる特異性と、多数のスラック領域が存在した場合に生じる特異性の二つを取り上げた。このうち、解析初期の特異性については、ペナルティ法による回避法を、スラックによる特異性については、微小な圧縮力を許容する修正弾性マトリクスによる回避法を、それぞれ示した。

(3) 修正弾性マトリクスによるリンクリング解析の有効性

具体的な例題を通して、修正弾性マトリクスによるリンクリング解析の有効性を示した。例題としては、面内問題を三例、面外問題を一例、取り上げた。

このうち、面内問題の二例（図 5、図 6）については、張力場モデルに基づく解析解との比較を行い、よく一致する結果を得た。残りの一例の面内問題（図 7）では、スラックによる特異性を伴う問題を解析し、微小な圧縮を許容する修正弾性マトリクスによって数値的に安定した解析を行えることがわかった。また、これら三例について、従来の代表的なリンクリング解析法である Miller と Hedgepeth により提案された解析を合わせて行い、本研究の解析と比較を行った。比較の結果、両解析には残差ノルムの収束性に大きな差異が存在することがわかった。本研究による解析が安定した収束性を示したのに対し、Miller 等の解析では収束に大きなステップを要するか、収束解を得ることが出来ないことがわかった（表 1,2、図 8）。これは、本研究の解析では、非線形性を考慮した増分型の修正弾性マトリクスを用いるため、正確な接線剛性行列を求めることが出来るためである。一方、Miller 等の解析では非線形性を考慮しおらず、接線剛性行列が不正確なものとなってしまう、収束性の悪化を招いている。

面外問題（図 9）については、ペナルティばねを用いて解析初期の特異性を回避し、収束解を得ることが出来た（図 10）。また、岩佐等によりシェルモデルによる解析から得られた主応力値と、本解析により得られた主応力値の比較を示した。両者は、曲げ剛性の影響で若干の差異はあるものの、定性的には十分な一致を示すことがわかった。

(4) 射影行列によるリンクル歪みエネルギー感度

本研究では、リンクルの強度を表す量として、リンクル歪みからなるポテンシャル量であるリンクル歪みエネルギーを定義した。本研究における線形代数的な視点から、リンクル歪みは射影行列を用いて表現されるが、このような表現から、変位ベクトルに対するリンクル歪みエネルギーの感度評価式を、射影行列を用いて表すことが可能となる。また、このことから、実際の構造設計パラメータに対するリンクル歪みエネルギーの感度評価式を半解析微分法を用いて、簡潔に表されることを示した。本評価式は、リンクリング現象に対する線形代数的な知見を基にして、初めて得られるものである。

例題として、膜面ケーブル構造（図 11）のケーブル自然長に対する感度解析を行った。感度評価として、射影行列を用いた半解析微分法による感度と、有限差分法を用いた感度を比較し、両者がよく一致することを確認した（表 3）。また、感度ベクトルを用いた設計変数の調整により、リンクリング領域を減少され得ることを示した（図 12）。

本研究において提示された射影行列によるリンクリング解析は、従来にない線形代数的な視点に立ったものであり、有限要素法を用いた膜面構造の解析や設計に、新たな発展をもたらすものである。また、本研究で提案するような射影行列によって表現される歪み・応力関係は、張力場理論に基づくリンクリング解析以外にも、特殊な弾性問題、例えば、岩盤解析などに用いられる様な、圧縮力のみを伝達する要素を仮定する no-tension 問題などにも適用可能であり、今後の幅広い活用が期待される。

表 1 矩形膜の純曲げ問題における収束に至るまでの反復回数

$2M/(Ph)$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.825
Proposed Approach	6	7	6	6	6	9	8	9	11	9	10
Miller and Hedgepeth	11	12	11	15	15	22	34	58	91	135	210

表 2 円形膜の捩り問題における収束に至るまでの反復回数

\bar{R}	1.3	1.6	1.9	2.2
Proposed Approach	6	7	7	7
Miller and Hedgepeth	13	12	15	17

表 3 リンクル歪みエネルギーの基準化された感度

	周辺ケーブル 1	周辺ケーブル 2
射影行列による感度	0.04458	-1.000
有限差分による感度 ($\Delta b_j = 10^{-8}$)	0.04463	-1.000
有限差分による感度 ($\Delta b_j = 10^{-9}$)	0.04463	-1.000
有限差分による感度 ($\Delta b_j = 10^{-10}$)	0.04461	-1.000

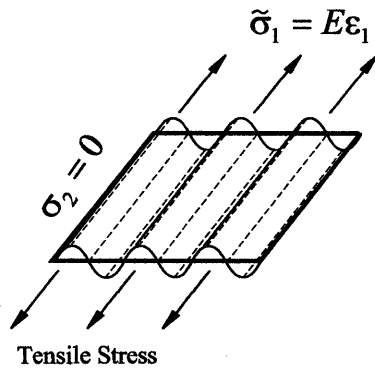
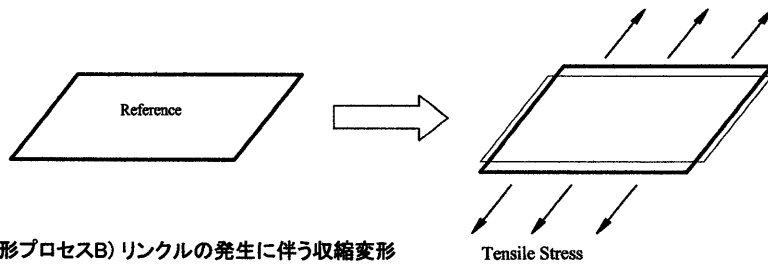


図1 リンクリング状態にある膜面の応力場

(変形プロセスA) 一軸の張力による伸張変形



(変形プロセスB) リンクルの発生に伴う収縮変形

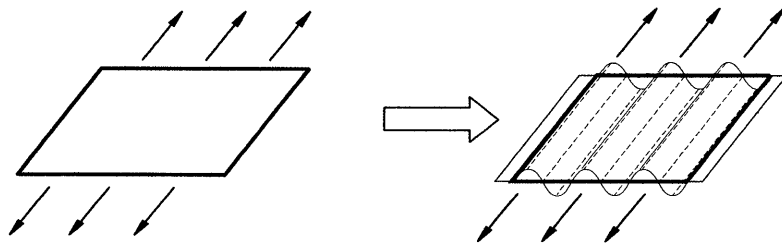


図2 リンクル形成のプロセス

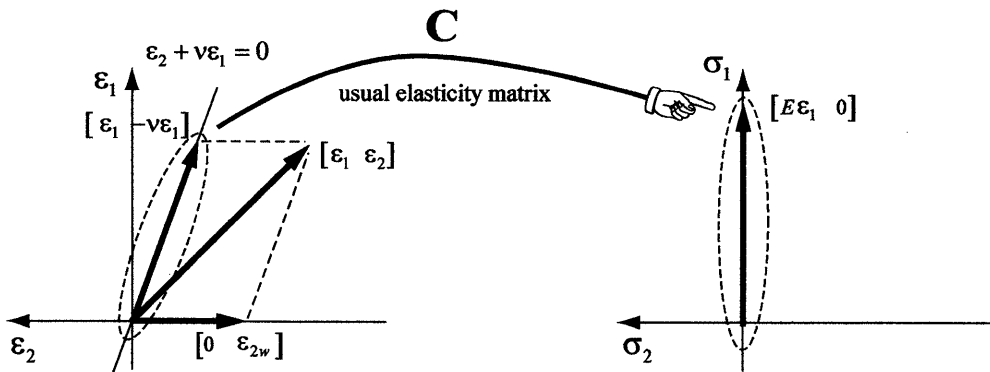


図3 変形プロセス A、B に対応する歪み・応力関係

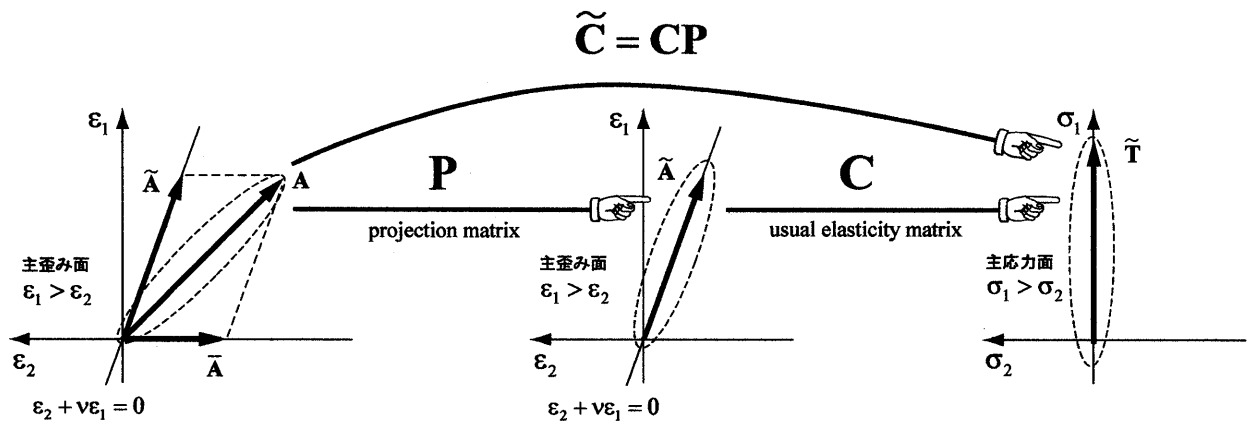


図4 修正弾性マトリクスによる段階的な応力評価

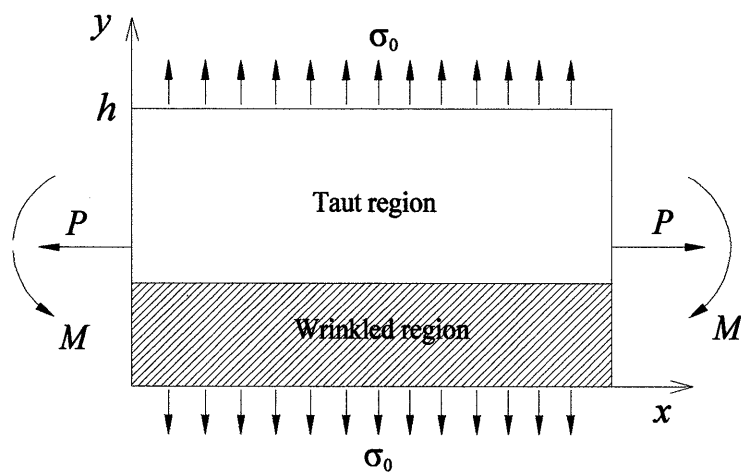


図5 矩形膜の純曲げ問題

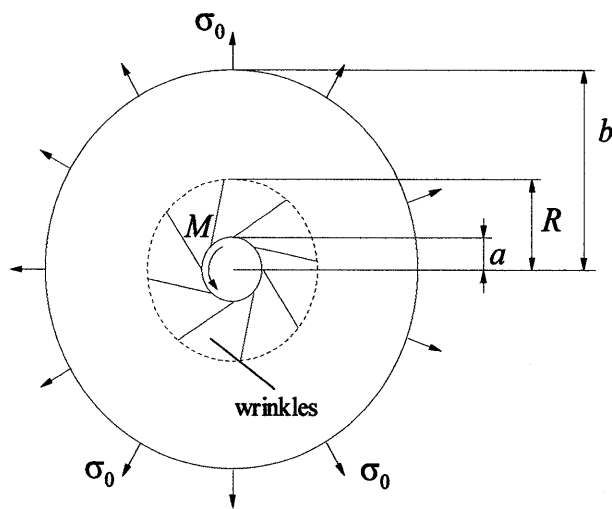


図6 円形膜の捩り問題

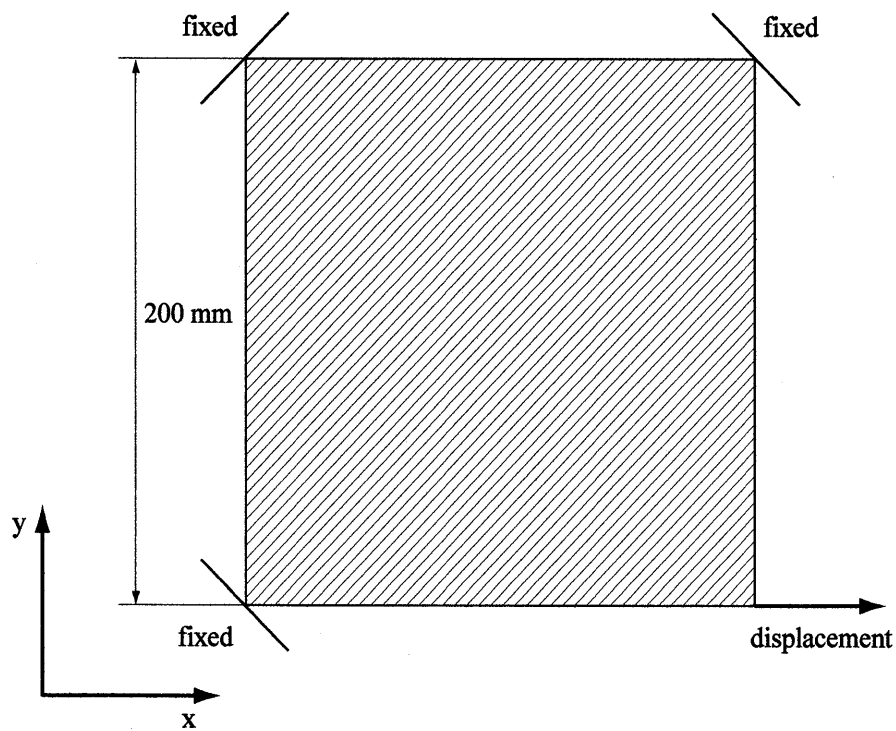


図7 三頂点支持膜の一頂点強制変位問題

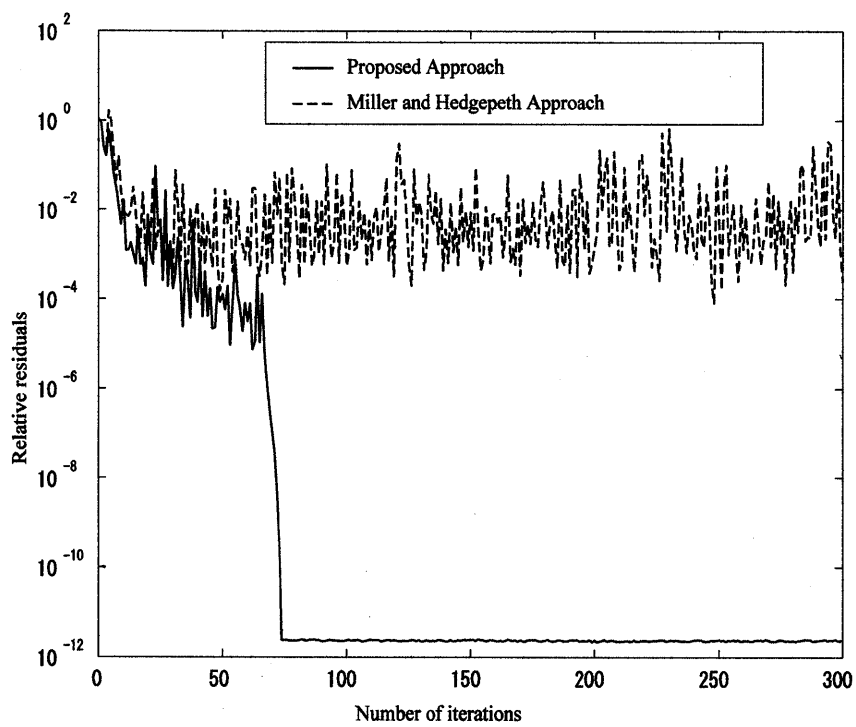


図8 ニュートン法の反復回数と相対残差ノルムの関係

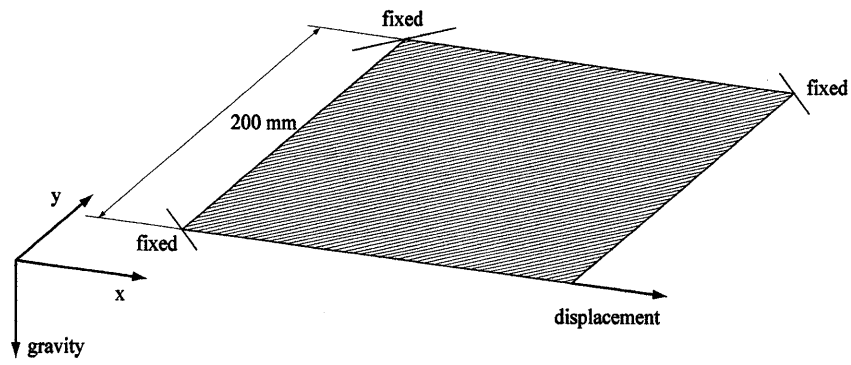


図9 重力下における三頂点支持膜の一頂点強制変位問題

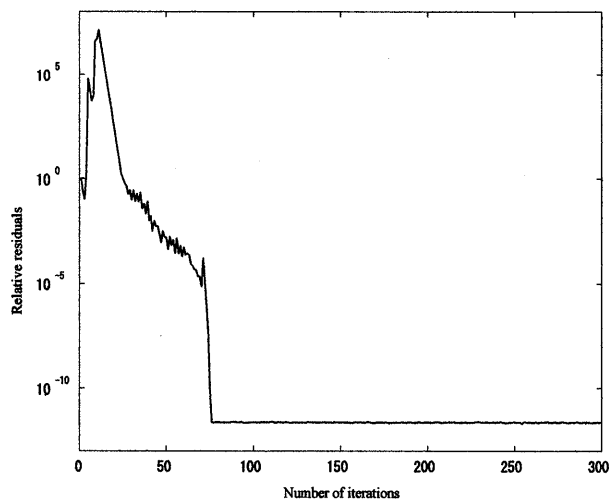


図10 ニュートン法の反復回数と相対残差ノルムの関係

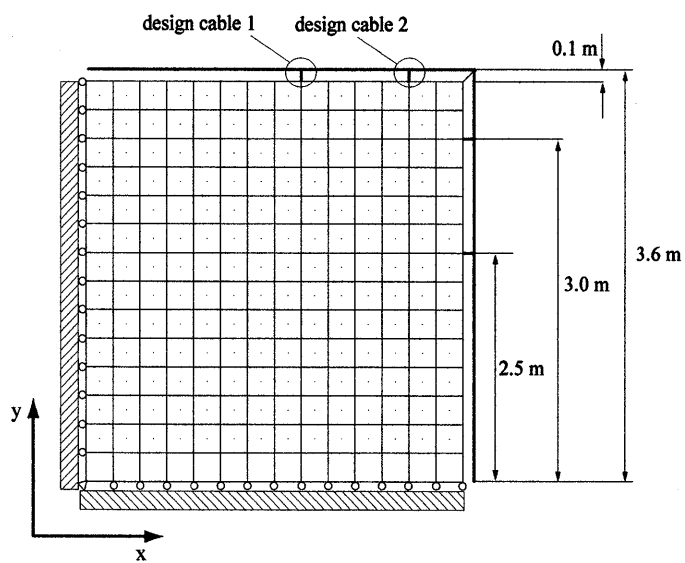
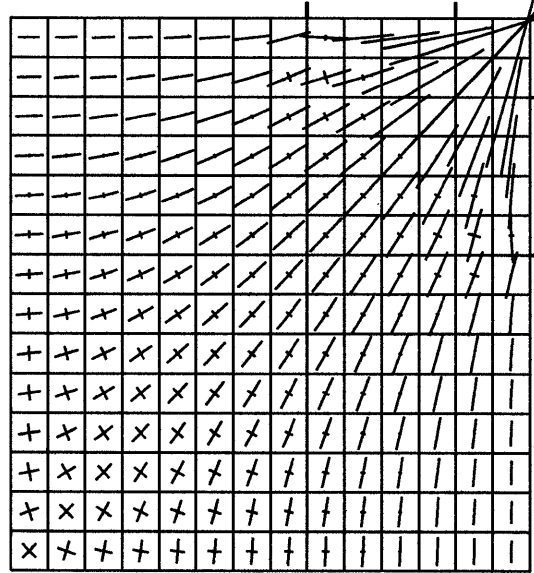
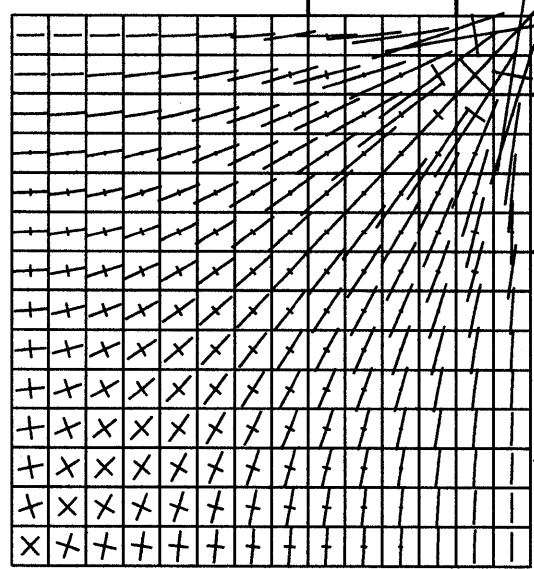


図11 膜面ケーブル構造

調整前



調整後



—— 非リプル領域の主応力
—— リプル領域の主応力

図 12 ケーブル調整前後の主応力分布図