論文の内容の要旨

論文題目 Solvability and unsolvability of nonlinear differential equations in a space of generalized functions of Colombeau's type
(Colombeau 型の超関数のなす空間における非線型微分方程式の可解性と非可解性)

氏　名　富川尚充

Colombeau 型の超関数のなす空間は distribution を含む algebra であり任意の階数の偏微分をもつという良い性質を備えている．この関数にはいくつかの枠組みがあるが本論文では片岡 [3] により定義された空間を考える．この空間は Colombeau[2] による空間と完全に同値ではないが定義はより簡潔で扱いやすい．本論文では Colombeau 型の超関数のなす空間における線型, 及び非線型の微分方程式の可解性と非可解性に関する研究を行った．結果は以下の通り三部に分かれる．

第一部, Colombeau 型の超関数の非線型性とその非線型微分方程式への応用について．

まず, Colombeau 型の超関数の非線型性について論じる．空間 $\mathbf{R}^{n_0}$ 上で考える．Colombeau 型の超関数のなす空間を $\mathcal{G}$ で表す．$\mathcal{G}$ における等号より少し弱い同値関係 $\overset{\infty}{\approx}$ を導入する．$u = v$ ならば $u^2 = v^2$ は成立するが, $u \overset{\infty}{\approx} v$ であっても $u^2 \overset{\infty}{\approx} v^2$ は成立するとは限らない．また, 多重指数のなす空間に線型順序を導入する．

そしてこの線型順序を用いて自然数 n に対して多重指数の n 対，すなわち n-多重指数のなす空間に線型順序 $\leq$ と擬順序 $\ll$ を導入する．n-多重指数 $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$, $\alpha_i, \alpha'_i \in \mathbf{Z}_+^{n_0}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$, $\alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \cdots \leq \alpha'_n$ に対して $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) < (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1})$ のとき $\beta \ll \beta'$ と定義する．また，n-多重指数 $\beta =$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+^{n_0}$, $n_0 \geq 1$ に対して $\Pi\partial^\beta u = (\partial^{\alpha_1}u)(\partial^{\alpha_2}u) \cdots (\partial^{\alpha_n}u)$ と定義する．このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 0.1. (第一部 **Theorem3.4.**) $n \geq 2, \beta_1 \ll \beta_2 \ll \cdots \ll \beta_m$ を満たす任意の n-多重指数 $\beta_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ と任意の $f_i \in C^\infty(\Omega) (i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ に対して次式を満たす $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ が存在する．

$$u \overset{\infty}{\approx} f_0, \Pi\partial^{\beta_1}u \overset{\infty}{\approx} f_1, \Pi\partial^{\beta_2}u \overset{\infty}{\approx} f_2, \ldots, \Pi\partial^{\beta_m}u \overset{\infty}{\approx} f_m.$$

さらに，u の初期値は $C^\infty(\Omega)$ の範囲内で任意にとれる．

次にその応用について論じる．次の定理が成り立つ．

Theorem 0.2. (第一部 **Theorem3.6.**) $n \geq 2$ とし，n-多重指数 $\beta_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ は $\beta_1 \ll \beta_2 \ll \cdots \ll \beta_m$ を満たすとする．$f \in C^\infty(\Omega)$ とする．C^∞-係数線型微分作用素 $P_i (i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ はその中に Ω 上可解で準楕円型のものが最低一つあるとする．このとき，

$$P_0 u + P_1 \Pi\partial^{\beta_1}u + P_2 \Pi\partial^{\beta_2}u + \cdots + P_m \Pi\partial^{\beta_m}u \overset{\infty}{\approx} f$$

は $\mathcal{G}(\Omega)$ の範囲で可解である．またこの解の初期値は $C^\infty(\Omega)$ の範囲内で任意にとれる．

例えば，多重指数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ と $C^\infty(\Omega)$-係数線型微分作用素 P と $f_1, f_2 \in C^\infty(\Omega)$ が与えられているとする．このとき，

$$Pu + (\partial^{\alpha_1}u)(\partial^{\alpha_2}u) \cdots (\partial^{\alpha_m}u) \overset{\infty}{\approx} f_1,\ u \overset{\infty}{\approx} f_2$$

は $\mathcal{G}(\Omega)$ の範囲で可解である．またこの解の初期値は $C^\infty(\Omega)$ の範囲内で任意にとれる．

これらの定理は $C^\infty(\Omega)$ を $\mathcal{G}_a(\Omega)$ に置き換えても成り立つ．よって $\mathcal{S}'(\Omega)$ は $\mathcal{G}_1(\Omega)$ に含まれるので distribution 係数の非線型微分方程式の可解性を示したことになる．ここにおいて $\mathcal{G}_a(\Omega)$ は $\mathcal{G}(\Omega)$ の元 u でその偏微分 $\partial^\alpha u$ が $\varepsilon^{-a|\alpha|-b}$ 程度で抑えられるもののなす空間で，$\mathcal{S}'(\Omega)$ は $\mathcal{S}'$ のある元の Ω への制限となっているもののなす空間とする．

第二部，Colombeau 型の超関数のなす空間における Lewy-溝畑方程式の可解性と非可解性について．

$m \in \mathbf{N}$ に対して Lewy-溝畑方程式

$$(\partial_1 + i x_1^{2m-1} \partial_2)u = f(x_2)$$

の $\mathcal{G}$ における可解性と非可解性について研究する．$f(x_2) \in C^\omega$ at $x_2 = 0$ ならば Cauchy-Kovalevskaja の定理により，この方程式は原点で解析的な局所解をもつことがわかる．Schapira は [6] で，$f(x_2) \in C^\infty \setminus C^\omega$ at $x_2 = 0$ ならば hyperfunction の範囲でこの方程式が原点で局所非可解であることを証明した．ここにおいて C^ω は analytic function のなす空間を表す．Colombeau は [1] で，$f(x_2) \in C^\infty$ のとき Colombeau 型の超関数の枠組みでこの方程式が association の意味で可解であることを証明した．しかし，その論文において彼は関数 $u(\phi, \varepsilon; x)$ の微分を通常の微分ではなく，$u(\phi, \varepsilon; x)$ と $\phi(x)$ の畳み込みの微分として定義した．本論文では通常の微分の定義を採用する．

三種類の弱解を導入する．一つめは通常の association$\approx$である．これはパラメーターεが0に収束するにつれ, テスト関数との積の積分が0に収束するという意味である．第二部第三節では次の定理を証明する．

Theorem 0.3.

$$(\partial_1 + ix_1^{2m-1}\partial_2)u \approx f(x_2)$$

は$\mathcal{G}$の範囲で原点で局所可解である．

$f \in C^\infty$ の場合が第二部 Theorem3.1, $f \in C$ の場合が第二部 Theorem3.3, $f \in \mathcal{S}'$ の場合が第二部 Theorem3.5 である．またこれらの解は非一意的であることを第二部 Theorem3.6 で示した．

二つめは θ-association$\overset{\theta}{\approx}$ である．これはテスト関数との積の積分が, ある定数$\theta > 0$を用いてε^θによって評価されるという意味である．θ-association は association よりも強い．第二部第四節では次の定理を証明する．

Theorem 0.4. (第二部 **Theorem4.1.**)

$$(\partial_1 + ix_1^{2m-1}\partial_2)u \overset{\theta}{\approx} f(x_2)$$

は $f(x_2) \in C^\infty \setminus C^\omega \, at \, x_2 = 0$ のとき$\mathcal{G}$の範囲で原点で局所非可解である．

三つめは infinity-association$\overset{\infty}{\approx}$である．これはテスト関数との積の積分が, 任意の$l \in \mathbf{N}$に対して$\varepsilon^l$によって評価されるという意味である．infinity-association はθ-association よりも強い．第二部第五節では次の定理を証明する．

Theorem 0.5. $n \geq 2$ なる整数nに対し,

$$((\partial_1 + ix_1^{2m-1}\partial_2)u)^n \overset{\infty}{\approx} f(x_2)$$

は$f(x_2) \in \mathcal{S}'(\Omega)$のとき$\mathcal{G}(\Omega)$の範囲で可解である．

$n = 2$の場合が第二部Theorem5.2, $n \geq 3$の場合が第二部Theorem5.7である．またこれらの解は非一意的であることを示した．

第三部, Colombeau 型の超関数のなす空間での3次元 Navier-Stokes 方程式の大域的な弱解について．

3次元 Navier-Stokes 方程式の大域的な弱解の存在は Leray[5] によってその存在が示された．それ以来, その弱解の性質について様々な研究がなされてきた．Leray の弱解の定義としては Kozono[4] で定義されているものを用い, 古典的弱解とよぶ．

第三部では Colombeau 型の超関数のなす空間における3次元 Navier-Stokes 方程式の大域的な弱解の研究を行う．この解を$\mathcal{G}$-弱解とよぶ．次の定理を証明する．

Theorem 0.6. (第三部 **Theorem3.1.**) $u=(u_1,u_2,u_3)$ を速度ベクトル, p を圧力, u_0 を与えられた初期値とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u+(u\cdot\nabla)u \approx \Delta u-\nabla p,\\
&\partial_x u_1+\partial_y u_2+\partial_z u_3 \approx 0,\\
&u|_{t=0}=u_0,\\
&\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}+2\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}ds \le \|u_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}
\end{aligned}
$$

を満たす $\mathcal{G}$-解 ($\mathcal{G}$-弱解) が存在する. この解は非一意的である.

そして次の系を証明する.

Corollary 0.7. (第三部 **Corollary3.2.**) 上の定理の条件を満たす $\mathcal{G}$-弱解で ϕ,ε,t を固定するごとに $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ となるものが非一意的に存在する.

$\mathcal{G}$-弱解のなす空間と古典的弱解のなす空間の間に包含関係はないが, 上の系で構成した $\mathcal{G}$-弱解と古典的弱解とはどちらも C_0^∞-関数列を用いて定義されている点で非常に似ている. 実際, 系の $\mathcal{G}$-弱解はノルムが定まらないことと, 質量保存の式が強い意味で成り立っていないことを除けば古典的弱解の条件を満たしている.

References

[1] J.F.Colombeau, *New general existence results for partial differential equations in the C^∞ case*, University of Bordeaux, (1984).

[2] J.F.Colombeau, *Elementary Introduction in New Generalized Functions*, North Holland Mathematics Studies, vol.113, (1985).

[3] K.Kataoka, *Some remarks on Colombeau's generalized functions*, RIMS Koukyuuroku 856, Kyoto Univ. 101-106, (1994).

[4] H.Kozono, *Hiasshukunenseiryuutai no houteisiki*, Suurikagaku, (1997.11), 9-14.

[5] J.Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., 63 (1934), 193-248.

[6] P.Schapira, *Une équation aux dérivées partielles sans solutions dans l'space des hyperfunctions*, C.R.Acad.Sc.Paris, t.265, série A, 665-667, (1967).