

論文審査の結果の要旨

氏名： 富川 尚充

本論文提出者は、Colombeau 型の超関数のなす空間における非線型微分方程式の可解性と非可解性に関する研究を行った。

Colombeau 超関数のなす空間とはフランスの Colombeau 教授が 1985 年頃定義した、積が常に定義できるような一般関数の可換代数である。この空間には微分作用素が作用し、 C^∞ -関数を部分微分代数として自然に含む。また局所性を持ち、層をなす。その実態は微少パラメータ $\varepsilon > 0$ をもつ、ほぼ任意の C^∞ -関数の全体に非常に強い同値関係を入れて得られる可換微分代数である。シュバルツ超関数もある種の軟化作用素とのたたみ込みによって Colombeau 超関数に埋め込まれるが軟化作用素の取り方に依存するので埋め込み方は一意的ではない。これが Colombeau 超関数論がモデル理論といわれる所以である。ただし C^∞ -関数の埋め込みに関しては許される軟化作用素の取り方によらないように工夫されている。この理論の中で通常の超関数論と著しく異なるのは C^∞ -関数と埋め込まれたシュバルツ超関数との積が必ずしもシュバルツ超関数の中での積と一致しないことである。例えば $x \times \delta(x)$ はゼロではない。従って C^∞ -係数の線形微分方程式のシュバルツ超関数解でさえ、一般には Colombeau 超関数解とはならない。(ただしその逆は常に成立する。) これは微少パラメータ ε をもつ C^∞ -関数が Colombeau 超関数として 0 であるための同値関係が極めて強すぎることにある。このギャップを埋め、ある程度通常の微分方程式論に適合するためにはシュバルツ理論のようなある種の弱い同値関係を導入する必要がある。実際 Colombeau 自身によってコンパクト台 C^∞ -関数との積分が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する事として、弱い同値関係 (association という) が定義された。もちろんこの同値関係は非線形演算とは両立しないので積など非線形演算に当たっては注意する必要がある。

このような状況下で論文提出者は次の様な主結果を得た。ただしここで Colombeau 超関数とは従来のものとやや異なり、片岡によって提案された、より理論的に取り扱い易い、急減少 C^∞ -級関数の部分族を軟化作用素の許されるモデルに使うクラスであるがその本質は従来のものと変わらない。

結果 1, 弱い同値関係の下ではほぼどんな微分方程式でも局所可解になってしまう。例えば佐藤超関数の中でさえ解を持たない、与えられた右辺をもつ Levy-Mizohata 型方程式が可解となる。これは Colombeau も示していたがその際の弱い解の意味が素朴なものとは異なっていたのに対し、ここでは完全に最初に定義した弱い意味の等式を満たしている解である。さらに、論文提出者は新たに、弱い同値関係の定義をやや計量的に制限した、 θ -association (ε^θ ($\theta > 0$) のスピードで 0 に収束) なる同値関係を導入し、このより強い同値関係の下では可解性がブロックされることを示した。すなわち、Levy-Mizohata 型方程式は再び解を持たなくなることを示した。

結果2, さらに θ -association の条件を究極的に強化した ∞ -association というべき概念を新たに導入する。そうしてもやはり非線形演算とは両立しないのであるが弱い意味の同値関係の中ではもっとも強い。この ∞ -association の下では結果1で見たように線形方程式に関する結果は通常常識が通用するが非線形項を少しでも含むような偏微分方程式では全く違う現象が起こる事を示した。すなわち非線形項を少しでも含むと非常に広い範囲の方程式が ∞ -association の意味では可解になってしまうことである。さらには一つの解がいくつもの非線形方程式を同時に満たすことさえありうることも示し、そのことからある種のシュバルツ超関数係数の微分方程式の可解性も得た。また Levy-Mizohata 型方程式の両辺を m 乗した方程式 ($m = 2, 3, \dots$) がこの意味で可解になってしまうことも示した。

結果3, Navier-Stokes 方程式の初期値問題が非常に具体的に書ける Colombeau 超関数の弱い意味での解をもつことを示した。また同時にこの解は一意的ではないもののエネルギー評価式を満たしている事を示した。

これらの結果はどれも常識とは相容れないような驚くべき内容を含んでいて今後この方面の研究に多大な影響を与えられ、得られた結果、導入された概念ともに高く評価できる。特に結果1については既にこの方面の専門家である Pilipovic 教授によっても大変評価されている。

よって、論文提出者 富川 尚充 は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。