論文の内容の要旨

論文題目　Optimal Stopping Problems and Their Applications
(最適停止問題とその応用)

氏名　來島　愛子

1　はじめに

最適停止問題はいわば「最適タイミング」を求める問題であり，経済学，オペレーションズ・リサーチ，金融工学など，幅広い分野において応用される重要な問題である．最適停止問題の目的は大きく確率最大化と期待値最大化の2つに分けられる．その中で古典的秘書問題はよく知られた確率最大化問題であり，多数の拡張が考えられてきた．

本論文では，古典的秘書問題の拡張として，有限期間にポアソン過程にしたがって到着する選択肢の中から最良の選択肢を選ぶ確率を最大にすることを目的とした，ポアソン到着最良選択問題について研究した．ポアソン到着問題は，期間内に到着する選択肢の数が未知であり，また到着時間も確率過程に従うという点において非常に現実的な拡張である．

ポアソン過程の到着頻度に関するパラメータが未知で，その事前分布が自然数パラメータをもつガンマ分布である場合を考えた．まず，選択肢に関して相対的な順位のみが観測される場合 (無情報問題) について最適停止規則を求めた．最適停止規則はある時刻までは観測するだけでそれ以降初めて候補が到着したとき停止するという閾値規則となる．次に，選択肢の価値が観測される場合 (完全情報問題) について順位のみ観測される場合とは異なり，問題は単調ではなく，OLA 停止規則が最適停止規則となるための十分条件を満たさないことを示した．

また，経済学で研究されてきたオークションを最適停止問題のフレームワークでモデルを考えた．本論文では1人の入札者の最適戦略に注目し，よく知られている公開，競り上げ型のオークションと，複数の品物が出品される競り下げ型のオークションにおいていくつかの効用関数を設定した問題について最適停止規則を求めた．

2 ポアソン到着問題

ポアソン過程にしたがって，選択肢が到着する．ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布にパラメータの 1 つが自然数であるガンマ分布 $G(r,1/a), r$ は自然数, $a>0$ を仮定する．所与の時刻 T までに到着する選択肢の中で最良のものを選ぶ確率を最大にすることを考える．このとき，選択肢についての情報として，現在までに到着した中での順位のみ得られる場合 (無情報問題) と価値が観測できる場合 (完全情報問題) がある．ここで，i 番目の選択肢が到着した時刻を s_i，その相対ランク (今までに到着した中での順位) を X_i と表す．

現在の相対的ベストがすべての中でベストである確率と次に到着する相対的ベストがすべての中でベストである確率を比較し，現在のほうが小さくない場合には停止するという OLA(one-stage look-ahead) 停止規則を求め，その最適性を示す．OLA 停止規則が最適であることを示すには OLA 停止領域が closed であることを示せばよいことが知られている．

ある時刻以降にはじめて到着した相対的ベストな選択肢を選ぶという戦略が，相対ランクのみ観測できる場合，最適であることを証明した．このような規則を閾値規則とよぶ．最適停止規則は次の定理で与えられる．

定理 1 ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $G(r,1/a), r$ は自然数, $a>0$ に従うとき，最適停止規則は $s_i^{(r)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストを選択する，である．すなわち，最適停止時刻 τ_r^* は

$$\tau_r^* = \min\{s_i \in [\, s_i^{(r)*}, T\,] : X_i = 1\}.$$

$s_i^{(r)*}$ は

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{i+j-1}{j} \theta^{r-j-1}(1+\ln\theta) + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j-1} \binom{i+l-1}{l} \frac{1}{j-l}(\theta^{r-l-1} - \theta^{r-j-1}) = 0,$$

ただし，$\theta = (s+a)/(T+a)$，の唯一解として定まり，i についての非増加列である．

また，閾値 $s_i^{(r)*}$ の漸近的なふるまいについて次の定理が与えられる．

定理 2

$$\lim_{i\to\infty} s_i^{(r)*} = \left[\frac{T+a}{e} - a\right]^+$$

よく知られたように古典的秘書問題の最適停止時刻を特徴付ける閾値は十分大きな観測数 n に対して n/e となる．これは定理 2 において λ のガンマ事前分布のパラメータ a を $a=0$ として得られる T/e と比べると興味深い．

ガンマ分布 $G(r,1/a)$, $r=3,4,5,10$ について閾値 $t_i^{(r)*} \equiv (s_i^{(r)*}+a)/(T+a)$ を数値計算により求めた．結果は以下の表にまとめた．

一方，選択肢の価値が観測できる場合について同様にポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $G(r,1/a), r$ は自然数, $a>0$ であるときを考える．一般性を失わないので価値 x の分布は一様分布 $U(0,1)$ と仮定する．また，時刻 s に到着した i 番目の選択肢が相対的ベストであり，価値 x である状態を (i,s,x) と表す．

表 1: $r = 3, 4, 5, 10$ のときの閾値

i	1	2	3	4	5	8	10	50
$t_i^{(3)}$	.600198	.526948	.487532	.463460	.447350	.420549	.410854	.377036
$t_i^{(4)}$	.663076	.580234	.532041	.501277	.480094	.443739	.430229	.381515
$t_i^{(5)}$	.709002	.622828	.569494	.534148	.509195	.465150	.448374	.385930
$t_i^{(10)}$	.827215	.750056	.692738	.649759	.616621	.551512	.524167	.407095

この問題において OLA 停止領域は

$$B_r = \left\{ (i, s, x) : 1 \geq -\ln b(s, x) + \sum_{k=1}^{i+r-1} \frac{b(s, x)^{-k} - 1}{k} \right\}.$$

ここで，$b(s, x) \equiv (s + a)/\{(T + a)\overline{x} + (s + a)x\} \geq 0$, $\overline{x} \equiv 1 - x$. OLA 停止領域は closed ではないことが示され，したがって OLA 停止規則が最適停止規則となるための十分条件を満たさないことが証明された．

3 オークションへの応用

最適停止問題の応用として，経済学で研究されてきたオークションを最適停止問題のフレームワークで定式化して，解くことを考えた．本論文では，1 人の入札者に注目し，その入札者の最適戦略を求めることが目的である．期待利得を最大にする目的で，いつオークションからおりるべきかを決定する最適停止規則を求めることになる．

オークションの形式は，イングリッシュ・オークション，ダッチ・オークションなど名前がついているもの，具体的には価格が上昇するもの，あるいは下降するもの，落札価格が付け値の最高額である，あるいは 2 番目に高い額であるものなど，さまざまである．価格が上昇していく上昇オークションと，価格が下降していく下降オークションについてそれぞれ取り上げた．

オークション参加者の 1 人にのみ注目して，ほかの参加者については注目した 1 人に対して情報を与える環境と仮定する．また，オークションは価格が単位時間に一定額変化（上昇あるいは下降）していくと仮定し，さらに一般性を失わないので，価格は 0 から単位時間に 1 変化すると考える．

上昇オークション

まず，上昇オークションにおいて注目した参加者について最適停止戦略を考える．いくつかの効用関数の形を考え，それぞれについて最適戦略を求めた．オークション終了時刻 N が一様分布 $U[1, M]$ に従うことを仮定する．また，オークションの品物の価値については時間によらず一定の場合と，時間によって変化する場合を考えた．時刻 i での損失関数と品物の価値をそれぞれ $l(i)$ と $v(i)$ で表す．落札したとき時刻 i で支払う金額は i であるので，効用関数は次のように表される．

$$R(i) = \begin{cases} -l(i), & \text{時刻 } i \text{ でオークションをおりたとき} \\ v(i) - i, & \text{時刻 } i \text{ で落札したとき} \end{cases}$$

品物の価値が一定の場合

品物の価値が一定 ($v(i) = T$, $T < M$) で損失関数が線形 ($l(i) = ci$) の場合，OLA 停止領域は

$c < 1/2$ のとき，

$$B = \left\{ i : i \geq \frac{1}{1-2c}(T - c - 1 - Mc) \right\},$$

であり，最適停止領域である．つまり，最適停止規則は $i \geq (T - c - 1 - Mc)/(1 - 2c)$ となるはじめての i でオークションからおりる，である．

品物の価値が時間により変化する場合

品物の価値が時間について線形 $(v(i) = v_0 + ui)$ であり，損失関数が線形 $(l(i) = ci)$ の場合，OLA 停止領域は

$$B = \{(2c + u - 1)i + (v_0 + u - Mc + c - 1) \leq 0\}.$$

$2c + u - 1 < 0$ のとき，B は最適停止領域である．つまり，$i \geq (v_0 + u - Mc + c - 1)/(1 - 2c - u)$ となるはじめての i で停止する，が最適停止規則である．

下降オークション

下降オークションについては最高額 M から出発して，価格が下降していくものとする．時刻が 1 進むごとに価格が 1 単位ずつ下がっていくので，利得は 1 ずつ増える．また，時刻 i での利得関数は次のように表されるとする．

$$\Pi(i) = \begin{cases} v + i, & \text{落札したとき} \\ 0, & \text{落札できなかったとき} \end{cases}$$

上昇オークションの場合と同様に，オークション終了時刻 N が一様分布 $U[1, M]$ に従うことを仮定すると，OLA 停止領域は

$$B = \left\{ i : v + i \geq \frac{M - i - 1}{M - i}(v + i + 1) \right\}$$

であり，これは closed であり，最適停止領域となる．したがって，最適停止規則は

$$i \geq \frac{M - v - 1}{2}$$

を満たす最小の整数 i を i^* とすると，i^* で停止，つまり品物を買う，である．また，i^* 以前に品物が売り切れてしまった場合には手に入れられないことになる．

次に，下降オークションにおいて同種の品物がいくつか出品されている場合について考えた．品物の残りの個数の情報が得られ，単位時間に売れる品物の個数が既知の平均 λ のポアソン分布に従うとすると，OLA 停止領域は次のように表される．

$$B = \left\{ (s, j) : \frac{v + s}{v + s + 1} \geq \sum_{k=1}^{j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ かつ } v + s + 1 > 0 \right\}.$$

ただし，(s, j) は時刻 s で残り j 個の状態を表す．B は closed であるので，最適停止領域である．よって，最適停止規則は $v + s + 1 > 0$ かつ $(v + s)/(v + s + 1) \geq e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{j} \lambda^k / k!$ を満たす最初の (s, j) で停止する，である．