論文審査の結果の要旨

氏名　市川　憲人

超弦理論のD－ブレーン上には低エネルギーで超対称ゲージ理論が誘導されることはよく知られている。このとき、もとの弦理論にいわゆる B 場 (NS セクターの２階反対称テンソル場) が存在しているとD－ブレーン上の座標 x_i はたがいに非可換となり非可換空間上のゲージ理論が得られる。非可換空間上の理論は通常の場の理論と異なる性格のソリトン解（非可換ソリトン）を持ち、また量子論的にも紫外と赤外領域が混合する独特の振る舞いを示す。また、D―ブレーン自身も非可換ソリトン解と解釈できる。

簡単のため二つの座標 x_1, x_2 が非可換の場合を考える

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta \tag{1}$$

すると座標の代わりに調和振動子の生成消滅演算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{\theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2), \quad [a, a^\dagger] = 1 \tag{2}$$

を用いることも出来る。

可換な空間上の関数 $f(x)$ に対して非可換空間上の作用素 $\mathcal{O}_f$ が次の様にして定義される

$$\mathcal{O}_f = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\tilde{f}(k)e^{-(ik_1\hat{x}_1 + ik_2\hat{x}_2)} \tag{3}$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^2xe^{ikx}f(x) \tag{4}$$

するとオペレターの積は関数のモヤル積に対応する

$$\mathcal{O}_f \cdot \mathcal{O}_g = \mathcal{O}_{f*g} \tag{5}$$

$$f * g(x) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_1\partial_2' - \partial_2\partial_1')}f(x)g(x')\Big|_{x=x'} \tag{6}$$

上の関係を用いると非可換空間では、座標についての微分が交換子

$$\partial_{x^i}f(x^1, x^2) \to \frac{\epsilon_{ji}}{\theta}[x^j, \mathcal{O}_f] \tag{7}$$

に対応することが分かる。

非可換２次元空間のスカラー場の理論を考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{g^2}\int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)\right) \tag{8}$$

ここで場の積は全てモヤル積で定義されている。座標をスケール変換 $x_1 \to \sqrt{\theta}x_1,\ \ x_2 \to \sqrt{\theta}x_2$ するとハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{g^2}\int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \theta V(\phi)\right) \tag{9}$$

で与えられる。非可換性の強い極限 $\theta \to \infty$ ではポテンシャル項が残る。運動方程式は $\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$ となる。今 λ_i が V の極値の一つとすると $\phi = \lambda_i$ は運動方程式の一つの解である。しかしモヤル積の下で自分自身に戻る作用素

$$(p * p)(x) = p(x) \tag{10}$$

を考えると $\phi = \lambda_i p$ も運動方程式の解となる。調和振動子の basis ベクトルを使うと (10) を満たす作用素は、例えば基底状態への射影演算子 $p = |0\rangle\langle 0|$ で与えられる。座標表示では $p(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ となるため、原点付近に集中した波動関数を表す。こうした非可換場の理論のソリトン解は GMS（Gopakumar-Minwalla-Strominger) ソリトンと呼ばれる。

Solution generating technique を議論するため非可換２次元空間上のゲージ理論を考える。作用は

$$\int d^2x \left(\frac{1}{2}(F_{ij})^2 + \frac{\delta^{ij}}{2}D_i\phi D_j\phi_j - V(\phi)\right) \tag{11}$$

共変微分は作用素

$$\bar{C} \equiv a + i\theta A, \quad C \equiv a^\dagger - i\theta\bar{A} \tag{12}$$

$$A = \frac{-i}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y), \quad \bar{A} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \tag{13}$$

で与えられる。これらの作用素を用いるとハミルトニアンは

$$H = 2\pi Tr\left(\frac{1}{2}([C,\bar{C}]+1)^2 + [C,\phi][\bar{C},\phi] + \theta V(\phi)\right) \tag{14}$$

と書かれる。ポテンシャルの極値を ϕ_* とすると運動方程式の自明な解は

$$\phi = \phi_*, \ \ A = 0 \Longrightarrow \bar{C} = a, C = a^\dagger \tag{15}$$

で与えられる。

ここでシフト作用素

$$S = \sum_{k=0} |k+1\rangle\langle k| \tag{16}$$

を導入すると

$$\bar{S}S = I,\ \ S\bar{S} = I - P_1 \tag{17}$$

を得る。ここで P_n は射影演算子 $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} |k\rangle\langle k|$ である。

シフト作用素の任意のべきを用いて新しいソリトン解

$$\phi = \phi_*(I - P_n) \tag{18}$$

$$\bar{C} = S^n a \bar{S}^n, \quad C = S^n a^\dagger \bar{S}^n \tag{19}$$

が作ることが出来る。場の強さは

$$F = \theta^{-\frac{1}{2}}[\bar{C}, C] - 1) = \theta^{-\frac{1}{2}} P_n \tag{20}$$

である。ここで構成した解はゲージ場が原点付近に集中するため D0 ブレーンをあらわすと解釈できる。

GMS ソリトンは D ーブレーンと反 D-ブレーンからなる系に拡張することも可能である。この場合、新たにタキオン場が現れる。系の作用は

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2} f(T) D^\mu T D_\mu T - V(T) - \frac{1}{4} h(T) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tag{21}$$

の形を持つ。

論文提出者は solution generating technique を非可換オービフォルド空間に適用できる様に拡張した。この手法はオービフォルド空間上の弦理論の非摂動的な性質を議論するのに有効である。オービフォルドとは、多様体に有限群が作用している時に、その多様体を有限郡の作用で割った商空間のことである。この論文では特に複素２次元空間に位数 n の巡回群 $\mathbf{Z}_n$ が次のように作用している

$$(z_1, z_2) \to (e^{\frac{2\pi i}{n}} z_1, e^{-\frac{2\pi i}{n}} z_2) \tag{22}$$

時の商空間 $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z_n}$ を考える。

著者はまずこの非可換空間上には n 種類のソリトン解があることを示し、特に D4—ブレーンと反 D4—ブレーンからなる系が崩壊してより低い次元のブレーンになる現象についての解析を行ない、どのようなブレーンが作られるかを決定した。これは境界場の弦の場の理論によって計算された結果と一致しており、またその結果の幾つかはこの論文によって提唱された方法によって初めて得られたものである。

ブレーンの崩壊の現象は位相的 K 理論の手法を用いて議論されるのが普通であるが、ここでは空間の非可換性を用いて K 理論とは異なる代数的方法によって独自の分析がなされており興味深い結果を得ている。

したがって、博士（理学）の学位を授与できると認める。