論文内容の要旨

論文題目　Exact solutions in one-dimensional

polynuclear growth model

（一次元多核成長模型の厳密解）

氏名　　　　今村　卓史

表面成長は自然界のさまざまなスケールでおこる興味深い現象の一つである。さらに表面成長におけるゆらぎはその成長のメカニズムに応じて普遍的な振舞いをするという意味で非平衡統計力学の問題として重要である。1986 年に Kardar-Parisi-Zhang は表面成長に関して一つの普遍クラス（KPZ 普遍クラス）を導入した。その後 KPZ 普遍クラスはさまざまな表面成長模型および非対称単純排他過程（ASEP）などの拡散模型の普遍性を記述していることがわかり、非平衡統計力学において重要な役割を果たしている。

一方ランダム行列理論は、乱数を要素としてもつ行列の統計的振る舞いを議論するものである。物理学においては 1950 年代に重い原子核のスペクトルを解析するために E.P.Wigner によって導入され、以後 Mehta、Gaudin そして Dyson らによってランダム行列の固有値相関の普遍性に関する興味深い数理構造が明らかにされた。またランダム行列理論はそれ自身の基礎理論の発展とともに二次元量子重力、量子色力学（QCD）、量子カオス、メソスコピック系等さまざまな分野に応用されている。

最近、上の 2 つのトピック、一次元 KPZ 系とランダム行列理論、が関係していることが明らかになり注目されている。一次元の KPZ 系において、荒さ指数（roughness exponent）等のスケーリング指数だけでなく物理量の分布関数そのものが厳密に得ら

れ、しかもそれがランダム行列の最大固有値の極限分布(Tracy-Widom 分布)に等しいことが判明したのである。

本論文では一次元 KPZ 普遍クラスに属する一次元離散多核成長模型(polynuclear growth(PNG) model)を厳密に解析することにより KPZ 系とランダム行列とのつながりを考察する。一次元離散 PNG 模型のルールは以下の通りである。(この模型は、時刻、高さは自然数に、位置は整数に値を持つという離散的な模型である。また時刻t、位置rにおける高さを h(r,t)であらわす。)

(1) 核生成: 時刻 t、位置 r において、高さ k の核が確率的に生成される。(図1)

(2) ステップの成長: いったん核生成がおこると1時刻あたり1つずつ左右へ成長する。(図1)

(3) ステップの合体: 2つのステップがぶつかるとき,その点での高さは高い方のステップの高さになる。(図2)

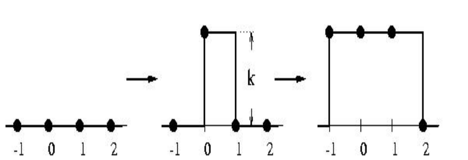

図1 核生成、ステップの成長の例: 原点で 高さ k の核が確率的に生成し、左右に成長する。実線は h([r],t)で書いた。(r は実数とし、[r] は r を超えない整数を意味する。)

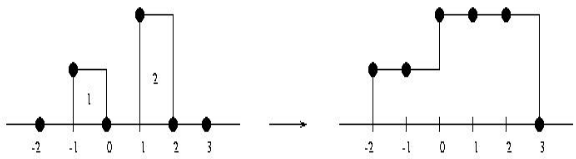

図2 ステップ合体の例: 高さ1と2のステップが原点でぶつかったとき、高さは2となる。

以上のルールで定義される離散 PNG 模型について、本論文では高さゆらぎの同時刻多点相関関数を議論した。PNG 模型の数理構造を明らかにし、それを用いて同時刻相関関数のスケーリング極限を得た。特に模型の空間が無限系か半無限系か、あるいは両端や原点における外場の値によって相関関数がどのように変化するのかを考察し、その結果相関関数は上の条件(無限系か半無限系か、および外場の値)に応じた様々なクラスの多行列模型の最大固有値のプロセスに等しいことを明らかにした。

具体的には以下のような議論を行った。まず第2章において一次元離散 PNG 模型を定義しその数理構造を議論した。最初に2章前半において、本論文で実際に解析の対象にする模型の定義を行った。さらに2章後半において、前半で定義された PNG 模型の数理構造を解析するために、多層版 PNG 模型を導入した。その結果 PNG 模型は多体の非交差ランダムウォーク模型と解釈することができ、測度が行列式の積で書けることが判明した。具体的には無限系で一つの、半無限系で外場がある場合とない場合に対応して二つの、合計三つのタイプの行列式型の測度が得られた。

３章では2章で得られた三つのタイプの行列式型の測度それぞれに関して、相関関数を考察した。この相関関数は我々が最終的に得たい PNG 模型の高さゆらぎの同時刻相関関数を特別な場合として含むものである。その結果、相関関数はフレドホルム行列式で表示できることを示した。

ここまでの、２章３章での解析を基にして、４章から６章において PNG 模型のスケーリング極限を考察した。４章と５章が無限系の解析、６章が半無限系の解析に当てられている。

４章では無限系 PNG 模型における高さゆらぎの同時刻相関関数のスケーリング極限を考察した。具体的には3章で得たフレドホルム行列式の積分核を二重積分表示し、スケーリング極限を鞍点法で評価した。具体的には以下のことがわかった。

(i) 両端の外場パラメタの積が臨界値より小さい時には、バルクの相関関数のスケーリング極限はエアリー過程で記述されることがわかった。ここでエアリー過程とはユニタリークラス（エルミート行列）の多行列模型あるいは、Gaussian Unitary Ensemble(GUE)間の遷移を記述する Dyson の行列のブラウン運動模型の最大固有値のプロセスのことである。それに対して両端に近いところの相関関数は一次元のブラウン運動の相関関数で記述される、すなわち高さゆらぎはガウシアンで表されことが示された。さらにバルクとエッジの統計が競合する点（GOE^2点）が存在していて、その付近の高さゆらぎの相関関数を記述するフレドホルム行列式表示を導出した。

(ii) 両端の外場の積が臨界値より大きい時は、 すべての地点の高さゆらぎがガウシアンで記述された。

(iii) 両端の外場の積が臨界値の時は特別な1点（F_0点）を除くすべての地点の高さゆらぎはガウシアンであり、F_0点付近の高さゆらぎを記述するフレドホルム行列式表示を得た。

(iv) GOE^2点、F_0点に関する高さゆらぎの1点関数については Baik-Rains によるリーマンヒルベルト問題をつかった解が知られている。この解と本論文で得たフレドホルム行列式の解との等価性を考察した。

５章では4章で得られた GOE^2点付近の高さゆらぎを記述するフレドホルム行列式のランダム行列による解釈をおこなった。その結果、このフレドホルム行列式は、外場のあるランダム行列を初期条件としてもつ Dyson の行列のブラウン運動模型の最大固有値のプロセスを記述していることが分かった。

６章では半無限系で原点に外場がある場合とない場合の二つの場合について、PNG 模型の高さゆらぎの相関関数のスケーリング極限が議論されている。解析手法は4章と同様で、二重積分表示されたフレドホルム行列式の積分核に鞍点法を適用した。具体的に以下のことがわかった。

(i)原点に外場がある場合、ない場合両方とも、バルクの高さゆらぎはエアリー過程で

記述された。
(ii) 原点に外場があるとき、原点付近の高さゆらぎはorthogonal-unitaryクラスのランダム行列間の遷移を記述するDysonの行列のブラウン運動模型の最大固有値のプロセスで記述された。
(iii)原点に外場がない場合、原点付近の高さゆらぎはsymplectic−unitaryクラスのランダム行列間遷移を記述するDysonの行列のブラウン運動模型の最大固有値のプロセスで記述された。

以上のように本論文ではPNG模型の数理構造に着目し高さゆらぎの同時刻多点相関関数のスケーリング極限を厳密に導出した。相関関数はフレドホルム行列式で表示できた。さらに無限系、半無限系の違いや両端、原点における外場の値の違いは、フレドホルム行列式の積分核の違いとして反映され、得られた相関関数には様々なクラスの多行列模型の最大固有値プロセスが対応していることが分かった。

本論文の解析手法、および結果は一次元 KPZ 普遍クラスに関して詳細な視点を与えた。さらにKPZ系とランダム行列理論が多点の相関という意味でも深く結びついていることを明らかにした。本論文で得られた手法、結果が、低次元非平衡系とランダム行列理論双方のさらなる結びつきや発展に寄与することを期待する。